MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Föreläsare: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Algebra, Matematik I, 7.5 hp
den 12 juni 2023

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

1. (a) Beräkna $z^3 + z^4 + z^5 + \cdots + z^8$ för $z = 2i$. Svara på formen $a + ib$. (3p)

   (b) Bestäm resten då polynomet $x^7 + x^6 + x + 4$ delas med $x + 1$. (1p)

   (c) Visa att $(P \implies Q) \vee (Q \implies P)$ är en tautologi (dvs. alltid sann). (1p)

   Lösning. (a) Vi har att $z^3 + z^4 + z^5 + \cdots + z^8 = z^3(1 + z^2 + \cdots + z^5)$, som med formeln for geometrisk summa blir $z^3(z^6 - 1)/(z - 1)$. Insättning med $z = 2i$ ger nu

   $$(-8i)\frac{-64-1}{2i-1} = 8i(-i) \cdot \frac{65}{(-i)(2i-1)} = 8 \cdot \frac{65}{2+i} = \frac{8 \cdot 65(2-i)}{5}.$$

   Detta förenklas vidare till $8 \cdot 13(2 - i) = 208 - 104i$.

   (b) Vi har att $x^7 + x^6 + x + 4 = k(x)(x + 1) + r$, så sätter vi in $x = -1$ fås resten. Nu, $x = -1$ instatt i $x^7 + x^6 + x + 4$ blir 3.

   (c) Vi gör en sanningstabell:

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$(P \implies Q) \vee (Q \implies P)$
F	F	S	S	S
F	S	S	F	S
S	F	F	S	S
S	S	S	S	S

   Från sista kolonnen ser vi att uttrycket alltid är sant oavsett värdena på P och Q.

2. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $(z^6 - 64)(z^4 + 5z^2 + 6) = 0$, där $z \in \mathbb{C}$. Alla rötter ska anges på rektangulär form. (5p)

   Lösning. Vi måste lösa $z^6 - 64 = 0$ och $z^4 + 5z^2 + 6 = 0$ separat. Den första ekvationen skrivs om som $z^6 = 2^6$, så om $z = re^{i\theta}$ måste vi ha att $r = 2$ och $6\theta = 2\pi k$ för $k \in \mathbb{Z}$. Detta ger att $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$, och

   $$z_1 = 2,\ z_2 = 1+i\sqrt{3},\ z_3 = -1+i\sqrt{3},\ z_4 = -2, z_5 = -1-i\sqrt{3},\ z_6 = 1-i\sqrt{3}.$$

   För den andra ekvationen sätter vi $z^2 = t$ och löser $t^2 + 5t + 6 = 0$. Denna löses av $t = -2$ samt $t = -3$. Detta leder till de fyra ytterligare rötterna $z = \pm i\sqrt{2}$ samt $z = \pm i\sqrt{3}$.

3. En talföljd definieras av $a_1 = 5$ och $a_n = 2a_{n-1} - 3$ för $n \geq 2$.

   (a) Beräkna a_2 och a_3. (1p)

   (b) Visa med hjälp av induktion att $a_n = 2^n + 3$ för alla $n \geq 1$. (4p)

   Lösning. (a) $a_2 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$ och $a_3 = 2 \cdot 7 - 3 = 11$.

   (b) Basfallet är $n = 1$, och vi ser att $2^1 + 3 = 5 = a_1$, så den slutna formeln gäller för $n = 1$. Antag nu att $a_n = 2^n + 3$ för något fixt $n \geq 1$. Rekursionen säger att

$$a_{n+1} = 2a_n - 3 = \text{enl. antagande} = 2(2^n + 3) - 3 = 2^{n+1} + 3.$$

   Det vill säga, $a_{n+1} = 2^{n+1} + 3$ så den slutna formeln gäller då även för nästföljande värde. Basfallet samt induktionsprincipen medför då att formeln gäller för alla heltal $n \geq 1$.

4. För varje $a \in \mathbb{R}$, lös följande ekvationssystem: (5p)

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 1 \\ x - 2y + 2z &= 1 \\ x + 8y - 4z &= a. \end{cases}$$

   Lösning. Systemet skrivs om på matrisform och vi Gauss-eliminerar med hjälp av mittenraden:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & -4 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 5 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -6 & a-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 10 & -6 & a-1 \end{array}\right]$$

   Den andra raden används nu för ytterligare eliminering i tredje raden:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array}\right]$$

   Vi ser att om $a \neq -1$ så saknas lösningar. Om $a = -1$, får vi systemet

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right].$$

   Lösningarna ges nu på parameterform:

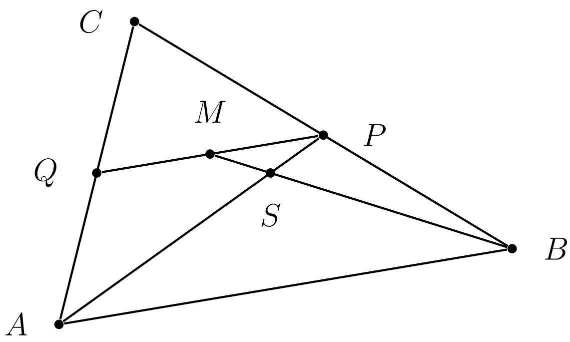
$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{5} - t\frac{4}{5}, -\frac{1}{5} + t\frac{3}{5}, t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. I triangeln med hörnen A, B och C sätts P på mittpunkten för sidan BC och Q på mittpunkten för sidan AC. Låt därefter M beteckna mittpunken på PQ. Linjerna AP och BM skär i en punkt S. Vektorerna $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ utgör en bas för planet.

(a) Utryck vektorn $\overrightarrow{BM}$ som en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. (2p)

(b) Utryck vektorn $\overrightarrow{AS}$ som en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. (3p)

Lösning. Vi ritar upp figuren:



Vi har att $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\mathbf{v}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, så $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$. Vidare,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}\right) = \frac{1}{4}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}.$$

Vi har nu att

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}.$$

Vi kan nu uttrycka $\overrightarrow{AS}$ som

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= s \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{BM} \\ &= \frac{s}{2}\mathbf{u} + \frac{s}{2}\mathbf{v} = \mathbf{u} - \frac{3t}{4}\mathbf{u} + \frac{t}{2}\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Då $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är linjärt oberoende får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{s}{2} &= 1 - \frac{3t}{4} \\ \frac{s}{2} &= \frac{t}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} s &= t \\ 2s &= 4 - 3s \end{cases} \implies s = t = \frac{4}{5}.$$

Alltså gäller $\overrightarrow{AS} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\mathbf{u} + \frac{2}{5}\mathbf{v}$.

6. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som projicerar en vektor i $\mathbb{R}^3$ vinkelrätt på vektorn $(2, 2, 1)$.

   (a) Bestäm avbildningsmatrisen för T i standardbasen. (2p)

   (b) Vektorerna $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{3}(2, -1, -2)$, $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{3}(-1, 2, -2)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. Bestäm avbildningsmatrisen A för T i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. (1p)

   (c) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^2$. Om $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är en linjär avbildning som uppfyller att $L(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ och $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, måste L vara en vinkelrät projektion på $\mathbf{u}$? Motivera ditt svar! (2p)

Lösning. (a) Formeln för vinkelrät projektion av $\mathbf{v}$ på en vektor $\mathbf{u}$ ges av

$$\mathbf{v}_{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u}.$$

Vi sätter in $\mathbf{u} = (2, 2, 1)$ och $\mathbf{v}$ de tre vektorerna som utgör standardbasen. Detta ger att

$$T(\mathbf{e}_1) = \tfrac{2}{9}(2, 2, 1), \quad T(\mathbf{e}_2) = \tfrac{2}{9}(2, 2, 1), \quad T(\mathbf{e}_3) = \tfrac{1}{9}(2, 2, 1),$$

och avbildningsmatrisen blir

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Vektorn $\mathbf{f}_1$ är parallell med $(2, 2, 1)$ och avbildas på sig själv. De två andra vektorerna är vinkelräta med $(2, 2, 1)$ och avbildas på nollvektorn. Avbildningsmatrisen blir då

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Om vi tar (som exempel) $\mathbf{u} = (1, 0)$ och $\mathbf{v} = (1, 1)$ så har vi ju att $L(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ och $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Men,

$$L((0, 1)) = L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = L(\mathbf{v}) - L(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}.$$

Å andra sidan är $(0, 1)$ vinkelrät mot $\mathbf{u}$ och borde avbildas på nollvektorn om L vore en vinkelrät projektion på $\mathbf{u}$. Alltså är L inte en vinkelrät projektion.