MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger
(smärre justeringar av Alan Sola)

Matematik II, analys del B, VT 20

Läsanvisningar samt rekommenderade övningsuppgifter

I kursen Matematik II, analys del B arbetar vi huvudsakligen med flervariabelanalys men även med vissa aspekter av konvergens av funktionsserier, särskilt potensserier, samt en kort introduktion till komplex analys. I flervariabeldelen är fokus på olika integraler och så kallade integralsatser.

Läsanvisningarna ska hjälpa dig att bearbeta stoffet och innehåller även rekommenderade övningsuppgifter till varje dag. Analys del B är betydligt mer räkneorienterad än del A, och då är det viktigt att du får erfarenhet och övning i att lösa sådana problem.

Antalet uppgifter är stort! Om du inte hinner med alla rekommenderar jag att du prioriterar att prioritera att ordentligt förstå de uppgifter du gör framför att få ner alla lösningar rätt på pappret (utan att nödvändigtvis lösa dem själv). Vid första genomgång kan du hoppa över uppgifterna som är i grå färg. De är varken oviktiga eller svårare! Men för det mesta tar de upp en aspekt som även finns i andra uppgifter.

Vissa uppgifter är kopplade till teorifrågorna på den skriftliga tentan.

För vissa uppgifter finns inget facit. Detta är helt medvetet och poängen är att du ska fundera själv (och gärna diskutera också med kurskamrater). En del av problemen kommer vi att diskutera på forumet. Om du har löst andra och vill veta om du har gjort rätt är du välkommen att skicka din lösning till Alan eller Linus, som kan kontrollera.

Dag 1

Dag 1 handlar om dubbelintegraler

Text: PB2: 6.1-6.3

Introduktionen till dubbelintegraler är delvis en repetition från Matematik I, men bara delvis eftersom vi nu definierar integraler även för inte nödvändigtvis kontinuerliga funktioner och framförallt även på mer generella mängder.

Observera att i Analys, del A, definierades integralen via över- och underintegraler (som i sin tur var definierade med hjälp av supremum och infimum av integraler över trappfunktioner). Eftersom boken PB2 inte använder sig av supremum och infimum blir definitionen här lite annorlunda (men kunde göras ekvivalent även på samma sätt med supremum och infimum).

Läs avsnitt 6.1 och 6.2. Innehållet är mycket viktigt, men bevisen får du hoppa över (om du vill). Läs även 6.3 t.o.m. sida 255.

Börja alltid uppgifter som handlar om att beräkna en integral över en mängd med att fundera över hur mängden ser ut! Helst använder du dig av en skiss, men det kan ibland bli svårt om området inte är en delmängd av planet $\mathbb{R}^2$.

Övningsuppgifter

Integraler över "enkla" områden:

B1: Ö 6.2

B2: 6.5

B3: 6.11

B4: 6.14

B5: 6.12

Integraler över "mer intressanta" områden:

B6: (a) Beräkna integralen $\iint_D \left(x^2y + y\sin x^9\right)\, dxdy$, där $D_a = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 2, y > 0\}$.

(b) Beräkna integralen $\iint_D \left(x^2y + y\sin x^9\right)\, dxdy$, där $D_b = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 2, y \ge 0\}$.

(c) Ange ett exempel på en kvadrerbar mängd och ett exempel på en icke-kvadrerbar mängd.

B7: (a) Beräkna integralen

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sin(\pi y^3)\, dy\right) dx.$$

(b) Är följande rätt eller fel? Motivera ditt svar (utan långa beräkningar!!).

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sin(\pi y^4)\, dy\right) dx = 0.$$

B8: Beräkna integralen

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{\frac{\pi}{y}}^{2\pi} \sin(xy)\, dx \right) dy + \int_{1}^{2} \left(\int_{\pi}^{\frac{2\pi}{y}} \sin(xy)\, dx \right) dy$$

B9: (a) Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara en kompakt kvadrerbar mängd som är bågvis sammanhängande och låt f vara en kontinuerlig funktion på D. Visa att det finns en punkt (ξ, η) i D sådan att

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \mu(D) f(\xi, \eta),$$

där $\mu(D)$ betecknar arean av D.

(b) Låt g vara en kontinuerlig funktion på den öppna enhetscirkelskivan $\mathbb{D} := \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ och beteckna med $B_r(a, b)$ den öppna cirkelskivan med centrum (a, b) och radie r. Visa att för varje punkt $(a, b) \in \mathbb{D}$ gäller

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \iint_{B_r(a,b)} g(x, y)\, dxdy = \pi g(a, b).$$

B10: Låt $D = \{(x, y) : -2 + x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$.

(a) Beräkna arean av D.

(b) Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq 1 + |xy|\}$.

(c) Beräkna integralen $\iint_D (1 + xy)\, dxdy$.

Dag 2

Dag 2 handlar om variabelbyte i dubbelintegraler samt generaliserade dubbelintegraler.

Text: PB2: 6.4, 6.6.

I matematik I diskuterades några speciella variabelsubstitutioner (nämligen till polära koordinater och linjära transformationer). Nu blir det mer generella variabelbyten i 6.4.

Läs sen 6.5 som handlar om generaliserade dubbelintegraler och lägg märke till skillnaden (och analogin) till motsvarande situation i en variabel.

Övningsuppgifter

Repetition från matematik I:

B11: Ö 6.19

B12: 6.21

B13: 6.23

Integraler med andra variabelsubstitutioner:

B14: 6.29

B15: Beräkna integralen

$$\iint_D x^4 - y^4\, dxdy$$

där D är den begränsade mängden som begränsas av kurvorna $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 3$ samt $x^2 + y^2 = 4$.

B16: (a) Använd variabelbytet $x = 2r\cos\varphi$ och $y = r\sin\varphi$ för att beräkna integralen

$$\iint_D x\, dxdy,$$

där D är given genom $x^2 + 4y^2 \leq 4$ och $x \geq 0$.

(b) Använd ett lämpligt variabelbyte för att beräkna integralen

$$\iint_D x\, dxdy,$$

där D är given genom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ och $x \geq 0$.

(c) Beräkna arean av ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

B17: Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}}\, dxdy$$

där D är området $y < x^2 < 2y$, $x < y^2 < 2x$. Motivera noggrant i fall du gör ett variabelbyte och kontrollera att alla förutsättningar är uppfyllda.

B18: Låt D vara området $1 \leq \frac{x^3}{y^2} \leq 2$, $1 \leq \frac{y^3}{x^2} \leq 2$. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{\frac{x^3}{y^2}+\frac{y^3}{x^2}} dxdy.$$

B19: Beräkna integralen

$$\iint_D xy\, dxdy,$$

där D är området i första kvadranten som begränsas av kurvorna $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$, $y = x^2$ och $y = x^2 + 1$.

Generaliserade dubbelintegraler:

B20: 6.33

B21: 6.36

B22: 6.38

B23: 6.43

B24: 6.44

B25: Beräkna den generaliserade integralen $\iint_D e^{-x^2-4y^2} dxdy$, där $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2y\}$, eller visa att den är divergent.

B26: Avgör om de generaliserade dubbelintegralerna, där D är den första kvadranten, är konvergent eller divergent:

(a)
$$\iint_D \frac{dxdy}{1 + x^3 + y^3},$$

(b)
$$\iint_D \frac{1 - x - y}{1 + (x^2 + y^2)^4} dxdy,$$

B27: Bestäm de tal α för vilka den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D e^{\alpha x} dxdy$$

konvergerar, där $D = \{(x, y) : x \geq 0, |y| \leq e^{-x}\}$. Beräkna den i de fall då den är konvergent.

Dag 3

Dag 3 handlar om huvudsakligen om trippelintegraler.

Text: PB2 1.4.5 (andragradsytorna), 7.1-7.2, 8.1

Börja med läsa avsnitt 1.4.5 om andragradsytorna. Lägg särskilt märke till Exempel 19 och 20.

Läs därefter avsnitt 7.1, särskilt exemplen med variabelbyte är vikiga. Funktionaldeterminanten vid bytet till rymdpolära koordinater kan du i framtiden bara använda, dvs om du kommer ihåg den, behöver du inte redovisa härledningen.
Avsnitt 7.2 om multipelintegraler kan läsas översiktligt. Avrunda med exemplen i 8.1.

Övningsuppgifter

Lite geometri i $\mathbb{R}^3$*:*

B28: Ö 1.32

B29: Beskriv och skissera (grovt!) följande ytor

a) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{4} = 1$

d) $-\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{4} = 1$

e) $y = x^2 + 4z^2$

f) $y = x^2 - 4y^2$

g) $y^2 = x^2 + 4z^2$

h) $y^2 = x^2 - 4z^2$.

Trippelintegraler av olika slag:

B30: Ö 7.2

B31: 7.3

B32: 7.7

B33: 7.10

B34: Beräkna volymen av ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

B35: Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K xyz \, dxdydz,$$

där $K := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 3(x^2 + y^2) \text{ och } x, y, z \geq 0\}$.

B36: Beräkna integralen

$$\iiint_D x^2 yz\,dxdydz,$$

där $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq y + z \leq z \leq 1\}$.

B37: Låt området D vara alla punkter $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sådana att $(x-2)^2+9y^2+9z^2 \leq 9$ och $x \leq 2$.

(a) Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D x\,dxdydz.$$

(b) Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D y\sin(y^{104})\,dxdydz.$$

Generaliserade trippelintegraler:

B38: 7.17

B39: (a) Beräkna följande trippelintegral eller visa att den är divergent:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,dxdydz.$$

(b) Beräkna följande trippelintegral eller visa att den är divergent:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\,dxdydz.$$

B40: För vilka värden på α, $\beta \in \mathbb{R}$ är den generaliserade integralen

$$\iiint_D \frac{|\vec{x}|^\alpha}{1+|\vec{x}|^\beta}\,dxdydz,$$

där $D = \{(x, y, z) : y > 0\}$ konvergent?

En kvadrupelintegral:

B41: Beräkna volymen av enhetsklotet i $\mathbb{R}^4$, dvs integralen

$$\iiiint_K 1\,dxdydzdw,$$

där $K = \{(x, y, z, w); x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1\}$.
Tips: En möjlighet är att dela upp integralen i en itererad integral av två dubbelintegraler, en annan alternativ är att dela upp i en och tre variabler.

Dag 4

Dag 4 ägnas åt kurvor och kurvintegraler.

Text: PB2: 3.1.1 (kurvor) , 9.1

Börja med att läsa avsnitt 3.1.1 som introduktion (och repetition) om kurvor.

Fortsätt med kapitel 9.1 om kurvintegraler, dvs integraler längs kurvor. Lägg särkilt märke till exempel 4 och 5.

Övningsuppgifter

Om kurvor

B42: 3.1

B43: 3.3

B44: Kurvan γ ges av

$$\begin{cases} x &= 1+\cos 2t \\ y &= \sin 2t \\ z &= 2\sin t \end{cases} \qquad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Visa att γ

(a) är en sluten kurva. Är den enkel?

(b) ligger på ytan $x^2+y^2+z^2=4$.

(c) ligger på ytan $(x-1)^2+y^2=1$.

Beskriv även med egna ord (eller skiss) hur kurvan ser ut.

Kurvintegraler

B45: 9.1

B46: 9.3

B47: 9.3

B48: Låt $\vec{F}(x,y) := (6x+2y^2, 4xy+3y^2)$. Beräkna kurvintegralen $\int_\sigma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ där kurvan σ

(a) är den del av den positivt orienterade ellipsen $x^2+2y^2=1$ som förbinder $(-1,0)$ och $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

(b) är den del av den negativt orienterade ellipsen $x^2+2y^2=1$ som förbinder $(-1,0)$ och $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

(c) är den hela positivt orienterade ellipsen $x^2+2y^2=1$.

B49: 9.5

B50: Låt f vara en $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$-funktion. Kurvan Γ går längs en nivåkurva till f från en punkt A till en punkt B. Vilket arbete utför kraftfältet $\vec{F}(x,y) := (\mathrm{grad} f)(x,y)$ på en partikel som rör sig längs kurvan Γ?

Dag 5

Dag 5 handlar om Greens formel och dess tillämpningar.

Text: PB2: 9.2, 9.3, samt början av 9.4.

Greens formel länkar ihop en kurvintegral (över en enkel sluten kurva) med en dubbelintegral av en lämplig integrand över området som begränsas av kurvan. Läs 9.2 och lägg märke till hur Greens formel kan med fördel användas även för kurvintegraler över ej slutna kurvor, t.ex i exempel 7.

I 9.3. tas upp två tillämpningar av Greens formel, nämligen areaberäkningen (av mer komplicerade områden än vi hittills klarade) och så kallade flödesintegraler.

Börja till slut även bekanta dig med de nya begreppen i början av avsnitt 9.4 (t.o.m. sida 345).

Övningsuppgifter

Kring Greens formel

B51: 9.8

B52: 9.10

B53: 9.4

B54: 9.15

B55: 9.21

B56: Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = ((\sin(y-x), 2xy + \sin(x-y))$ och γ är kurvan $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$.

B57: Låt D vara området av alla punkter (x, y) som uppfyller antingen $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ eller $3 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

(a) Skissa D samt markera den positivt orienterade randen ∂D.

(b) Beräkna

$$\int_{\partial D} xy\,dx + (x^2 - y^2)dy.$$

B58: Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma x\sin(y^2)\,dx + (x^2 y\cos(y^2) + 2x)\,dy,$$

där γ är ellipsen $x^2 + 4y^2 = 1$, genomlupen ett varv moturs.

B59: I beviset av Greens formel i PB2 står ”Om vi i stället använder en uppdelning av D med linjer parallella med x-axeln får vi på liknande sätt

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \int_{\partial D} Q\,dy.$$

Genomför även den delen av beviset!

B60: Låt P, Q, Ω och D vara som i Greens formel. Låt dessutom f och g vara $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$-funktioner. Visa att kurvintegralen

$$\int_{\partial D} (P(x,y) + f(x))\, dx + (Q(x,y) + g(y))\, dy$$

inte beror på varken f eller g.

Tillämpningar av Greens formel

B61: 9.23

B62: 9.25

B63: 9.28

Dag 6

Dag 6 handlar om potentialer och frågan när kurvintegraler är oberoende av vägen.

Text: PB2: 9.4

Läs hela avsnitt 9.4, som utgör en central del av kursen. Särskilt satserna 2 och 3 samt satserna 4 och 5 är viktiga här. Studera även noggrant exemplen, de illustrerar satsernas betydelse.

Övningsuppgifter

Potentialfält och exakta differentialformer

B64: 9.30

B65: 9.31

B66: 9.33

B67: 9.37

B68: Betrakta differentialformen $\omega = (\sin xy + xy\cos xy + 2x)dx + (x^2\cos xy + e^y)dy$.

(a) Är ω exakt?

(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\mathcal{C}} (\sin xy + xy\cos xy + 2x)dx + (x^2\cos xy + e^y)dy$$

där $\mathcal{C}$ är kurvan längs hyperbeln $9y^2 - x^2 = 1$ från punkten $(0, 1/3)$ till punkten $(2\sqrt{2}, 1)$.

(c) Ange en kurva γ_1 sådan att $\int_{\gamma_1} \omega = e - 1$.

(d) Ange en kurva γ_2 sådan att $\int_{\gamma_2} \omega = 1 - e$.

(e) Ange en kurva γ_3 sådan att $\int_{\gamma_3} \omega = 0$.

Kurvintegraler, delvis med hjälp av potentialer

B69: 9.40

B70: 9.39

B71: 9.43

B72: Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C \frac{y^2}{1+x^2y^4}dx + \left(\frac{2xy}{1+x^2y^4} + e^x\right)dy$, där C är kurvan $|x| + |y| = 1$ moturs.

B73: Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{-y^2dx + 2xydy}{x^2 + y^4}$$

från $(-1, 0)$ till $(1, 0)$ längs kurvan $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t, 2t^2 - 2), -1 \le t \le 1$.

B74: Låt $D \subset \mathbb{R}$ vara ett kompakt område vars rand ∂D utgörs av ändligt många styckvis $\mathcal{C}^1$-kurvor. Låt f vara en lösning till Laplace-ekvationen $\Delta f = 0$, dvs en $\mathcal{C}^2$-funktion som uppfyller

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Visa att om f försvinner på randen av D så är f identiskt noll, dvs visa att om $f(x, y) = 0$ för alla $(x, y) \in \partial D$ så är även $f(x, y) = 0$ för alla $(x, y) \in D$.

Tips: Beräkna kurvintegralen $\int_{\partial D} -f f'_y \, dx + f f'_x \, dy$.

Dag 7

Dag 7 handlar om kurvintegraler i rummet, samt ytor och ytintegraler.

Text: PB2: 10.1 (kurvintegraler), (1.4.5), 3.1.2, 8.2, 10.1 (ytintegraler, början)

Nu fortsätter vi med vektoranalys i rummet, dvs i fokus är nu vektorfält i rummet (alltså funktioner av tre variabler och med tre komponenter). Börja med det korta avsnittet om kurvintegraler i Kapitel 10.1.

Resten av dagen ägnas åt ytor och ytintegraler. Om du inte kommer ihåg, så kan du repetera 1.4.5, som är en inledande text om ytor.

Fortsätt med avsnitt 3.1.2. och lägg särkilt märke till beräkning och tolkning av normalvektorn.

Dessa används sen i avsnitt 8.2., som handlar om areor av buktiga ytor (dvs icke-plana ytor).

Avsluta med texten om ytintegraler i 10.1.

Övningsuppgifter

Kurvintegraler i rummet

B75: 10.3

B76: 10.7

Om ytor

B77: Betrakta ytan i uppgift 3.6. (i ÖPB2).

(a) Beskriv ytan med egna ord.
(b) Beskriv följande parameterlinjer: (i) $t = 0$ (ii) $t = \frac{\pi}{2}$ (iii) $s = 0$.
(c) Bestäm en normalriktning till ytan i punkten $(1, \sqrt{3}, 1)$.
(d) Bestäm en normalriktning till ytan i punkten $(3, 0, 0)$.

B78: Bestäm normalvektorn till ytan

$$\mathbf{r}(s,t) = (s\cos t, s\sin t, s^2), \qquad s \geq 0, t \in [0, 2\pi]$$

och tolka grafiskt.

Areor

B79: 8.15

B80: 8.17

B81: 8.18

B82: Paraboloiden $z = x^2 + y^2$ delar sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i två ytor. Beräkna arean av var och en av dessa ytor.

Ytintegraler

B83: 10.8

B84: 10.9.

B85: Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^4}$ in i sfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Dag 8

Dag 8 fortsätter med ytintegraler och handlar om Gauss sats.

Text: PB2: 10.2.

Läs hela kapitel 10.2 om Gauss sats (som relaterar en ytintegral till en volymintegral) och lägg ner tid på att räkna uppgifter!

Övningsuppgifter

Fler ytintegraler

B86: 10.13

B87: 10.30

Gauss sats

B88: 10.16 och 10.17

B89: 10.20

B90: 10.26

B91: 10.28

B92: 10.31

B93: Beräkna flödesintegralen

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

där $\mathbf{F} = (x^3, y^3, 1)$ och Y är ytan $z = \cos(x^2+y^2)$, $x^2+y^2 \leq \frac{\pi}{2}$ (normalen uppåt).

B94: Beräkna $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, där $\mathbf{F} = (x^4+yz-x^5, 5x^4y, z)$ och Y är den delen av ytan $x^2+y^2-z^2 = 1$ för vilken $0 \leq z \leq 1$. Normalen pekar bort från z-axeln.

B95: $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2z^2 + y^2z^2 + xyz, xz - 2xyz^2 - \frac{y^2z}{2}, ze^{x^2+y^2})$, Y är den del av paraboloiden $z = x^2+y^2$, där $0 \leq z \leq 4$. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$, där enhetsnormalen $\mathbf{n}$ har negativ z-komponent.

B96: Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är den delen av ytan

$$(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1 + z^2 \quad \text{där } 0 \leq z \leq 1,$$

$\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y samt $\mathbf{F} = (y, x, 1+x^2z)$.
OBS: Det kan bli en längre räkning.

B97: Beräkna flödesintegralen

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

där $\mathbf{F} = (xy, y^2z, z)$ Y är ytan $\{x^2+y^2-z^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$ och $\mathbf{N}$ är den enhetsnormal som pekar bort från z-axeln.

Dag 9

Dag 9 handlar huvudsakligen om Stokes sats

Text: PB2: 10.3 och 10.4

Läs avsnitt 10.3 som behandlar Stokes sats. Se även här till att du har tillräckligt med tid för att verkligen räkna flera uppgifter!

Avsnitt 10.4 introducerar lite mer formellt (och mycket praktiskt) räkning med differentialoperatorer.

Övningsuppgifter

Stokes sats

B98: ÖPB2: 10.52

B99: 10.53

B100: 10.55

B101: 10.57

B102: 10.60

B103: Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (4x^3y^3 + z, 3x^4y^2 + z^2, z^5)$ och γ är skärningen mellan ytorna $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ och $z = x + 2y$, orienterad moturs uppifrån sett.

B104: Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där $\mathbf{F} = (ye^x, e^x + x^3, z^5)$ och γ är skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och ytan $z = 2xy$, orienterad på så sätt att den ortogonala projektionen på xy-planet är orienterad moturs.

B105: Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x, y, z) = (z \cos y, -xz \sin y + 2x, x \cos y)$ och γ är skärningskurvan mellan ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ och planet $z = 1$, orienterad moturs uppifrån $z \geq 2$ sett.

Nablaräkning

B106: 10.36

B107: 10.38

B108: 10.40

B109: 10.51

Dag 10

Dag 10 handlar om Potentialfält samt komplexa kurvintegraler.

Text: PB 10.5, K avsnitt 1-2

I avsnitt 10.5 handlar det igen om potentialfält, fast nu i $\mathbb{R}^3$.

Läs sen avsnitt 1-2 i kompendium K. Där handlar det om komplexvärda funktioner av en komplex variabel, som också kan ses som två reella variabler, nämligen real- och imaginärdelen.

Potential

B110: 10.61

B111: 10.63

B112: 10.67

B113: Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\Gamma_a} yze^{xyz}\,dx + zxe^{xyz}\,dy + xye^{xyz}\,dz$$

som funktionen av a, där Γ_a är den orienterade kurvan definierad av $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq a$.

B114: Avgör om vektorfältet $\mathbf{F} = (axy+2z, x^2+2yz, y^2+bx)$ är ett potentialfält i $\mathbb{R}^3$ för några värden på konstanterna a och b. Bestäm i förekommande fall en potential.

Blandat

B115: Ω är en öppen delmängd av $\mathbb{R}^3$. För de reellvärda funktionerna f och g gäller $f \in C^1(\Omega)$ och $g \in C^2(\Omega)$. Y är en orienterad C^1-yta i Ω med enhetsnormalen $\mathbf{n}$. Den slutna C^1-kurvan γ är randkurvan till Y. Visa formeln

$$\iint_Y (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n}\,dS = \int_\gamma (f\nabla g) \cdot d\mathbf{r},$$

där omloppsriktningen i kurvintegralen är moturs, sedd från spetsen av $\mathbf{n}$.

Komplexa kurvintegraler

B116: Beräkna

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n}$$

(a) där $n \in \mathbb{N}$ och kurvan γ är en cirkel i det komplexa talplanet $\mathbb{C}$ med radie $R > 0$ och medelpunkt a och som är orienterad moturs

(b) där $n = 1$ och $a = 0$ och kurvan γ kvadraten i det komplexa talplanet $\mathbb{C}$ med hörn i $\pm 1 \pm i$ och som är orienterad moturs.

Dag 11

Dag 11 handlar om analytiska funktioner.

Text: K avsnitt 3-5

Analytiska funktioner kan karakteriseras på olika sätt, i avsnitt 3 diskuteras (komplex) deriverbarhet. Observera att detta är en väldigt stark egenskap, med tanke vilka konsekvenser det har, och hur många enkla funktioner av två variabler faktiskt inte är analytiska.

Avsnitt 4 kopplar till kurvintegraler i det komplexa talplanet. Cauchys integralformel (Sats 4.1) är mycket central och användbar.

I Avsnitt 5 använder man den för att beräkna vissa generaliserade integraler av reella funktioner, t.ex. längs hela reella axeln $\mathbb{R}$. Knepet är då att först titta på ändliga integraler (t.ex. längs ett reellt intervall $[-R, R]$). När $R \to \infty$ får man den generaliserade integralen man är intresserad i. Man kompletterar nu kurvan till en sluten kurva i det komplexa talplanet, t.ex. med en halvcirkel med radie R. Oftast är det så att denna komplexa integralen går lätt att beräkna, medan kurvintegralerna som man har lagt till, antingen också är lätt att beräkna eller (för det mesta) försvinner de när man går i gräns, i exemplet $R \to \infty$. Observera dock att kurvorna man lägger till beror ganska mycket på hur integranden och integrationintervallet ser ut, se exemplen.

Övningsuppgifter

Analytiska funktioner

B117: K1

B118: K2

B119: Låt $f(z) = x^2 + xy + i(xy + y^2)$ och $g(z) = e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x$, där $z = x + iy$.

(a) Avgör om f respektive g är analytisk.

(b) Bestäm för den analytiska funktionen (den komplexa) derivatan och uttryck den som en funktion av z.

(c) Beräkna kurvintegralen för var och en av funktionerna längs den positivt orienterade cirkeln $|z| = 1$.

(d) K23

(e) K24

Cauchys integralformel

B120: K3

B121: K4

B122: K5

B123: K6

B124: K7

B125: Låt $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3 + 4z}$. Beräkna kurvintegralen $\int\limits_\gamma f(z)\,dz$ då kurvan γ

(a) är cirkeln $|z| = 1$, orienterad moturs.

(b) är cirkeln $|z| = 3$, orienterad moturs.

(c) är cirkeln $|z - 1 - i| = 3$, orienterad moturs.

(d) är cirkeln $|z| = 2$, orienterad moturs.

Reella integraler

B126: K8

B127: K9

B128: K10

B129: (a) Beräkna den generaliserade integralen $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos x}{x^2 + 4} dx$.

(b) Fungerar samma metod även för integralen $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{e^{-x^2}}{x^2 + 4} dx$?

Dag 12

Dag 12 handlar om likformig konvergens.

Text: K avsnitt 6 och början av 7.

Vi kommer i slutet av kursen se att analytiska funktioner har ännu en ekvivalent beskrivning via serier. Innan dess behöver vi dock diskutera konvergens av funktionsföljder (och funktionsserier).

Hittills betraktades följder av reella eller även komplexa tal. Men nu betraktar vi följder av funktioner $f_k(t)$, dvs för varje punkt $t \in D$ har vi en följd av tal. Fokus ligger på frågan hur ”konvergensen beror” på t.

De visar sig att om en funktionsföljd konvergerar likformigt, så är den rätt så ”robust”, t.ex. satser 6.1-6.3 gäller. Lägg särskilt märke till Anmärkning 6.1 och exemplen.

Observera också att de flesta utsagor gäller för komplexvärda funktioner som är definierade i en mängd $D \subset \mathbb{C}$. Då är alltså ett reellt intervall $[a, b]$ ett specialfall.

Övningsuppgifter

Likformig konvergens

B120: K11

B121: K12

B122: (a) I sats 6.1, 6.2 och 6.3 är funktionsföljden definierad i ett intervall. Förklara varför endast i sats 6.2 intervallet är förutsatt vara kompakt. I vilken punkt faller beviset för icke-kompakta intervall?

(b) Låt

$$f_k(x) = \frac{\sqrt{k}\, x}{1 + k^2 x^2}, \quad g_k(x) = \frac{k\, x}{1 + k^2 x^2}, \quad h_k(x) = \frac{k^2\, x}{1 + k^2 x^2}$$

för $x \in [0, 1]$. Undersök för varje funktion om den konvergerar likformigt på $[0, 1]$ samt bestäm gränsvärdet av den bestämda integralen över $[0, 1]$ då k går mot ∞.

(c) Ange ett intervall $[a, b]$ sådan att g_k är likformigt konvergent.

Serier

B123: K13

B124: K14

B125: K15

B126: Undersök om följande serier angående punktvis och likformig konvergens:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x), \qquad x \in (-1, 1].$

Dag 13

Dag 13 handlar om Funktionsserier med särkilt fokus på potensserier, både reella och komplexa.

Text: K resterande del av avsnitt 7 och avsnitt 8

I avsnitt 7 tillämpas satserna om funktionsföljder till specialfallet av funktionsserier.

Fortsätt med avsnitt 8, där studeras en väldigt viktig klass av funktionsserier, nämligen potensserier.

Övningsuppgifter

B127: K16

B128: K17

B129: K18

B130: K19

B131: K20

B132: (a) För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}?$$

(b) Konvergerar serien även någon av följande icke-reella punkter: $x_1 = \frac{i}{2}$, $x_2 = 1+i$, $x_3 = i$?

(c) Beräkna

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

för alla reella x, där serien konvergerar.

B133: (a) Beräkna

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{5^k k}.$$

För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar serien?

(b) Ange intervall sådant att serien

$$(i) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{5^k k} \qquad (ii) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{5^k k^2}.$$

konvergerar likformigt på detta intervall.

B134: (a) Bestäm alla $z \in \mathbb{C}$ för vilka den följande följande serien konvergerar:

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2(n!)} \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^n} \qquad (iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n (z+2)^n.$$

Dag 14

Dag 14 handlar huvudsakligen om potensserier och analytiska funktioner.

Text: K avsnitt 9 och 10

Avsnitt 9 utgör nu höjdpunkten av hela kapitlet, nämligen sats 9.3. Observera att det också betyder: Om en funktion är (komplext) deriverbar i en liten omgivning av en punkt, då är den redan godtyckligt många gånger deriverbar i denna omgivning!

Slutligen används potensserier i samband med differentialekvationer som en metod att lösa annars svårlösta ekvationer.

Övningsuppgifter

B135: K 21

B136: Beräkna integralen

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2(z+3i)}\,dz,$$

där Γ är den positivt orienterade cirkeln

(a) $|z+i| = 1$

(b) $|z+2i| = 1$,

(c) $|z+2| = 25$,

(d) $|z-2i| = 1$.

B137: Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

med hjälp av en potensserieansats (även om det går att lösa även på annat sätt!).