MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Teorifrågor i kursen
Matematik II, Analys del B
VT20

Observera att examinationen under VT2020 genomförs på distans. Av denna anledning kommer teoridelen av kursen examineras som beskrivet pådet sätt som beskrivs i forumsinlägg. Nedanstående teorifrågor kan ändå ge en viss uppfattning om teoriaspekten av kursen.

När en teorifråga besvaras skall man bevisa det som anges i frågan, men man förväntas **inte** bevisa de satser eller lemman som beviset bygger på (dvs. de satser/lemman som kommer tidigare enligt kursens upplägg).

Del 1

1. Formulera satsen om *variabelbyte i multipelintegraler* och ange ett exempel (inklusive redovisning att alla förutsättningar i satsen är uppfyllda!). Ange även ett resonemang som förklarar hur formeln för variabelbyte i multipelintegraler relaterar till motsvarande formel för enkelintegraler. Förklara speciellt varför flervariabelversionen innehåller beloppstecken som inte behövs i en variabel.

2. Ge definitionen av en *kurvintegral* $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ (där du även förklarar vad γ, $\mathbf{F}$ är). Visa att kurvintegralen är oberoende av parametriseringen.

3. Formulera och bevisa *Greens formel*. (Om ditt bevis innehåller flera steg av liknande typ behöver du inte utföra dessa flera gånger).

4. Ange definitionen av ett *potentialfält* samt av att en *kurvintegral är oberoende av vägen*.

   Låt $\mathbf{F} = (P, Q)$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en öppen bågvis sammanhängande mängd Ω i planet. Visa att om $\mathbf{F}$ är ett potentialfält och γ en kurva i Ω, så är kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ oberoende av vägen.

5. Ange definitionen av ett *potentialfält* samt av att en *kurvintegral är oberoende av vägen*.

   Låt $\mathbf{F} = (P, Q)$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en öppen bågvis sammanhängande mängd Ω i planet. Visa att om kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen, så är $\mathbf{F}$ ett potentialfält i Ω .

6. Ange definitionen av ett *potentialfält* samt av att en öppen mängd är *enkelt sammanhängande*.

   Låt $\mathbf{F} = (P, Q)$ vara ett vektorfält av klass C^1, definierat i en öppen bågvis sammanhängande mängd Ω i planet. Visa att om $\mathbf{F}$ är ett potentialfält, så är $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$. Visa också att om Ω är enkelt sammanhängande, $\mathbf{F}$ är av klass C^1 och $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$, så är $\mathbf{F}$ ett potentialfält. Det skall framgå av beviset hur antagandet att Ω är enkelt sammanhängande används.

7. Förklara vad som menas med *parametrisering av en yta* och hur man kan bestämma en *normalvektor* till ytan med hjälp av en parametrisering. Redogör för begreppet *orientering av en yta* (gärna med exempel).

   Ange formeln för *arean av en yta*, och härled utifrån det formeln för arean av en funktionsgraf, dvs arean av $G := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$ där f är en $\mathcal{C}^1$-funktion.

8. Formulera och bevisa *Gauss sats*. (Om ditt bevis innehåller flera steg av liknande typ behöver du inte utföra dessa flera gånger).

9. Formulera *Stokes sats* med alla förutsättningar.
   Bevisa satsen, eventuellt under lite strängare förutsättningar, och ange dessa i så fall.

Del 2

1. Definiera begreppet analytisk funktion. Låt f vara en funktion sådan att dess realdel $u(x, y)$ och imaginärdel $v(x, y)$ är av klass C^1 (som funktioner av x och y). Visa att den komplexa derivatan $f'(z)$ existerar om och endast om u och v uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer.

2. Definiera begreppet analytisk funktion. Formulera och bevisa Cauchys integralformel (triangelolikheten för komplexa integraler behöver inte visas).

3. Definiera begreppen likformigt konvergent funktionsföljd och likformigt konvergent funktionsserie. Förklara skillnaden mellan punktvis och likformig konvergens för följder. Visa att om en följd av kontinuerliga funktioner konvergerar likformigt i ett intervall $[a, b]$, så är gränsvärdet av integralerna (över $[a, b]$) lika med integralen av gränsfunktionen.

4. Definiera begreppen likformigt konvergent funktionsföljd och likformigt konvergent funktionsserie. Förklara skillnaden mellan punktvis och likformig konvergens för följder. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats.

5. Definiera begreppen likformigt konvergent funktionsföljd och likformigt konvergent funktionsserie. Förklara skillnaden mellan punktvis och likformig konvergens för följder. Visa att om potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradie R som är positiv och ändlig, så konvergerar serien absolut för alla $|x| < R$, divergerar för alla $|x| > R$ och konvergerar likformigt i varje intervall $[-S, S]$, där $S \in]0, R[$.