SAMMANFATTNING FÖRELÄSNING 1

ALAN SOLA

Den första föreläsningen på kursen fokuserade på dubbelintegraler samt itererade enkelintegraler.

Vi började med att definiera dubbelintegral för *trappfunktioner* på en rektangel på formen

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d\}.$$

Vi satte

$$\iint_D \Phi(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\mu(\Delta_{i,j})$$

där $\Delta_{i,j} \subset \Delta$ är rektanglar på vilka $\Phi(x) = c_{i,j}$ är konstant och $\mu(\Delta_{i,j}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ är dessa rektanglars areor. Vi observerade att detta integralbegrepp uppvisar de vanliga egenskaperna linjäritet och monotonicitet, samt uppfyller triangelolikheten för integraler.

Därefter infördes dubbelintegraler för mer generella begränsade funktioner: f säges vara *integrerbar* om man för varje $\epsilon > 0$ kan finna trappfunktioner $\Phi \leq f \leq \Psi$ sådana att deras integraler skiljer sig med högst ϵ. Efter att ha visat att om f är integrerbar och den *itererade enkelintegralen* $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$ existerar så är dessa lika, gav vi ett bevis för att en kontinuerlig funktion f på Δ är integrerbar och att dess integral kan beräknas med itererade integraler.

För att hantera integration på generella områden D, ej nödvändigtvis av rektangeltyp, införde vi begreppet *nollmängd*. Vi visade att grafen av en kontinuerlig funktion $\alpha(x)$ ger upphov till en nollmängd. Vi skisserade ett bevis för att en kontinuerlig funktion på en begränsad mängd vars rand är en nollmängd är integrerbar och noterade att om

$$D = \{(x,y) \colon a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

och f är kontinuerlig på D så gäller

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\right) dx.$$

Department of Mathematics, Stockholm University, 106 91 Stockholm, Sweden.
Email address: `sola@math.su.se`