STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sofia Tirabassi

Exam / Tentamen
MM5024 Logik 7,5 hp
VT 2023
Onsdag, 2023-08-09

This exam consists of two parts. The basic part (grundläggande del) has 6 problems (1–6), worth a total of 20 points. The problem part (problemdel) has 3 problems (7–9), worth a total of 20 points. You can obtain a maximum of 40 points.

You may submit your answers in either English (pp. 2–3) or Swedish (pp. 4–5). In case of ambiguity the English text is the one that holds.

No aids are allowed besides paper and pen. Write clearly and motivate your answers carefully. All yes/no answers should be justified. You may use the soundness and completeness theorems (and any other theorems from the course), but state clearly when you do so.

——— Good luck! — Lycka till! ———

Written Exam (English)

Basic part

1 (4 pts) Let Γ a maximally consitent theory with the existence property and with infinitely many variables not occurring free in Γ. Give the cases for the following operators in the proof of the existence of a model for Γ

(a) $\varphi \vee \psi$

(b) $\forall x_i \varphi$

2 Consider the models $\mathcal{V}_1$ and $\mathcal{V}_2$ defined in the following tables

	P_1	P_2	P_3
$\mathcal{V}_1$	0	0	0
$\mathcal{V}_2$	1	0	1

(a) (1 pt) Give a formula φ that is true in both models but it is not a tautology

(b) (1 pts) Give a formula that is true in $\mathcal{V}_1$ but not in $\mathcal{V}_2$

(c) (1 pts) Give a formula that is true in $\mathcal{V}_2$ but not in $\mathcal{V}_1$

3 Consider the formula

$$\varphi := \exists x_3 \, (\forall x_1 (P_1(x_1) \wedge P_1(x_3)) \to \exists x_2 (f_1(x_2) \doteq x_1)) \wedge (\forall x_1 (P_1(x_1) \vee P_1(f_1(x_2))))$$

in the language of arity type $\langle 1 \,;\, 1 \rangle$.

(a) (1 pts) Find the free variables of φ

(b) (3 pts) Substitue the following

$$x_1/x_2, \quad f_1(f_1(x_2))/x_3, \quad f_1(x_3)/x_1$$

(c) (2 pts) In the above substitutions, decide if the subsituting term is free for x_i in φ

(d) (1 pt) Let $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, E, s \rangle$ with $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ the successor function and E the set of even numbers. Consider the interpretation $v : \mathrm{Var} \to \mathbb{N}$ defined $v(x_i) = 0$. Determine if $\mathcal{A}, v \models \varphi$

(e) (2 pts)Find another interpretation w such that $\mathcal{A}, w \models \varphi$

4 (4 pts) Derive the following:

(a) $\neg P_1 \to \neg P_2 \vdash P_2 \to P_1$

(b) $(\exists x_1 P_1(x_1)) \wedge P_1(f_1) \vdash \exists x_1 (P_1(x_1) \wedge P_1(f_1))$

Problem part

5 In the arity type $\Sigma = \langle \;;\, 1 \rangle$

(a) (1 pts) Give a closed formula φ_{in} defining "f is injective" and a closed formula φ_{onto} defining "f is surjective"

(b) (2 pts) Consider the formula $\varphi := \forall x_0 f_1(f_1(x_0)) \doteq x_0$. Determine if $\{\neg\varphi_{\text{onto}}, \varphi\}$ is a consistent theory

(c) (2 pts)With φ as before, give a derivation $\varphi \vdash \varphi_{\text{in}}$

6 (4 pts) Consider the structure $\mathcal{A} := \langle \mathbb{N}; \ ; 0, 1, +, \cdot \rangle$, over the arity type $\langle \ ; 0, 0, 2, 2 \rangle$

Give a formula over this arity type that represents the predicate "x_1 is prime" on $\mathcal{A}$.

You do not need to justify that your formulas represents this predicate. Recall that a number is prime if it is not 1 and its only divisors are itself and 1. Hint: first find a formula representing the simpler predicate "x_1 divides x_2".

7 (5 pts) Determine if it is possible to derive each of the following for every formula φ and ψ. If so, give a derivation. If not give a choice of φ and ψ and a countermodel showing that a derivation is not possible

(a) $\forall x_1 \neg\varphi \vdash \exists x_2 \varphi$

(b) $(\exists x_1 \varphi) \wedge (\exists x_3 \psi) \vdash \exists x_1 (\varphi \wedge \psi)$

8 (6 pts) Work over the arity type $\langle \ ; 2 \rangle$, and with the structure $\mathcal{Q} := \langle \mathbb{Q}; \ ; \leq \rangle$, and let v be the valuation of variables defined by $v(i) = i$ for each $i \in \mathbb{N}$ (so $[\![x_i]\!]^{\mathcal{Q},v} = i \in \mathbb{Q}$).

Now take $\Gamma_{\mathcal{Q},v}$ to be the theory $\{ \varphi \in \text{Form} \mid \mathcal{Q}, v \vDash \varphi \}$.

(a) Is Γ maximally consistent?

(b) Does Γ have the existence property?

Justify your answers!

——— End of exam ———

Skriftligt prov (Svenska)

Grundläggande del

1 (4 pts) La γ vara en maximalt konsistent teori med den "existence propertyöch med oändliga många variabler som inte förekommer fritt i Γ. Ge fallen för följande operatorer beviset att Γ har en model.

(a) $\varphi \vee \psi$

(b) $\forall x_i \varphi$

2 Betrakta modellerna $\mathcal{V}_1$ och $\mathcal{V}_2$ som defineras i den följande tabbellen

	P_1	P_2	P_3
$\mathcal{V}_1$	0	0	0
$\mathcal{V}_2$	1	0	1

(a) (1 pt) Ange en formel φ som är sant i begge modellerna men som inte är en tautolgi

(b) (1 pts) Ange en formel som är sant i $\mathcal{V}_1$ men falsk i $\mathcal{V}_2$

(c) (1 pts) Ange en formel som är sant i $\mathcal{V}_2$ men falsk i $\mathcal{V}_1$

3 Beträkta formeln

$$\varphi \coloneqq \exists x_3\, (\forall x_1(P_1(x_1) \wedge P_1(x_3)) \to \exists x_2(f_1(x_2) \doteq x_1)) \wedge (\forall x_1(P_1(x_1) \vee P_1(f_1(x_2))))$$

i språket med ställighetstypen $\langle\, 1\, ;\, 1\, \rangle$.

(a) (1 pts) Hitta den fria variablerna till φ

(b) (3 pts) Substitutera den följande

$$x_1/x_2, \quad f_1(f_1(x_2))/x_3, \quad f_1(x_3)/x_1$$

(c) (2 pts) I substitutionerna ovanför, bestäm om termerna som substituera är fria för x_i i φ

(d) (1 pt) La $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, E, s \rangle$ med E mängden av jämna tal och $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ den successorfunktion. Betrakta interpretationen v : Var $\to \mathbb{N}$ som defineras som $v(x_i) = 0$.Bestäm om $\mathcal{A}, v \models \varphi$.

(e) (2 pts)Hitta en annan interpretation sådan att $\mathcal{A}, w \models \varphi$

4 (4 pts) Visa ett harledning för var och en av följande:

(a) $\neg P_1 \to \neg P_2 \vdash P_2 \to P_1$

(b) $(\exists x_1 P_1(x_1)) \wedge P_1(f_1) \vdash \exists x_1(P_1(x_1) \wedge P_1(f_1))$

Problemdel

5 I aritetet $\Sigma = \langle\ ;\ 1\, \rangle$

(a) (1 pts) Ange en stängd formel φ_{in} som defineras "f är injektivöch en stängd formel φ_{onto} som defineras "f är surjektiv.

(b) (2 pts) Betrakta formeln $\varphi \coloneqq \forall x_0 f_1(f_1(x_0)) \doteq x_0$. Bestäm om teorin $\{\neg\varphi_{\text{onto}}, \varphi\}$ är konsitent

(c) (2 pts)Visa ettt hardledning för $\varphi \vdash \varphi_{\text{in}}$, med φ som ovan.

6 (4 pts) Låt $\mathcal{A}$ vara strukturen $\langle\, \mathbb{N}\,;\;\; ; 0, 1, +, \cdot\, \rangle$, för ställighetstypen $\langle\;\; ; 0, 0, 2, 2\, \rangle$

Ge en formel över denna ställighetstyp som representerar predikatet "x_1 är ett primtal" på $\mathcal{A}$.

Ni behöver inte att redovisa noggrant att er formel representerar detta predikat. Kom ihåg: ett tal är ett primtal om det inte är ett och bara 1 och själv delar det. Börja med den enklare predicaten :"x_1 delar x_2

7 (5 pts) Bestäm om det är möjligt att härleda var och en av följande för varje formel φ och ψ. Om ja, ange ett härledning. Om inte, ange formler φ och ψ och motmodel som visar att ett härledning inte finns.

(a) $\forall x_1 \neg\varphi \vdash \exists x_2 \varphi$

(b) $(\exists x_1 \varphi) \wedge (\exists x_3 \psi) \vdash \exists x_1 (\varphi \wedge \psi)$

8 (6 pts) Arbeta med ställighetstypen $\langle\; ; 2\, \rangle$, och strukturen $\mathcal{Q} \coloneqq \langle\, \mathbb{Q}\,;\; ; \leq\, \rangle$, som i frågan **??**, och låt v vara värderingen av variablerna definierat av $v(i) = i$ för varje $i \in \mathbb{N}$ (alltså $[\![x_i]\!]^{\mathcal{Q},v} = i \in \mathbb{Q}$).

Nu, låt $\Gamma_{\mathcal{Q},v}$ vara teorin $\{\, \varphi \in \text{Form} \mid \mathcal{Q}, v \vDash \varphi \,\}$.

(a) Är Γ maximalt konsistent?

(b) Har Γ existensegenskapen?

Redovisa dina svar noggrant!

——— Slut på provet ———