MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Föreläsare: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Algebra, Matematik I, 7.5 hp
den 10 augusti 2023

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

1. (a) Beräkna koefficienten framför x^8 i $(2x^4 + x^{-1})^7$. (2p)

   (b) Bestäm resten då 3^{100} delas med 5. (1p)

   (c) Bestäm resten då $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 3^{100}$ delas med 5. (2p)

2. Ekvationen $z^4 - 8z^3 + 27z^2 - 50z + 50 = 0$ har $z_1 = 3 + i$ som en rot. Finn övriga rötter $z \in \mathbb{C}$. (5p)

3. Svara på följande frågor.

   (a) Hur många 6-siffriga tal kan bildas av $1, 2, 3, 4, 5, 6$, så att varje siffra förekommer exakt en gång. (1p)

   (b) Hur många 6-siffriga tal kan bildas av $1, 1, 2, 2, 2, 5$, där 1 förekommer två gånger, 2 förekommer tre gånger och 5 förekommer en gång? (2p)

   (c) Bland 1260 ord, så finns det 120 ord där `aa` förekommer, 120 ord där `bb` förekommer och 24 ord där både `aa` och `bb` förekommer. Hur många av orden uppyller att varken `aa` eller `bb` förekommer? (2p)

   (Notera att bland de 120 ord som innehåller `aa`, så får `bb` också förekomma, och vice versa för de ord som innehåller `bb`.)

4. Beräkna inversen till matrisen A nedan och lös ekvationssystemet: (5p)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{respektive} \qquad \begin{cases} 2x + y + z & = 3 \\ 3x + 2y + z & = 4 \\ x + y + z & = -2. \end{cases}$$

5. (a) Låt $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ och $\mathbf{v} = (3, 1, 2)$. Finn en nollskild vektor som är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. (1p)

   (b) Om $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ utgör en ON-bas, vad går det att säga om $|\mathbf{f}_1|$, $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2$ samt $\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_3$? (1p)

   (c) Bestäm talen a, b och c i matrisen nedan så att matrisen blir ortogonal. (3p)

$$\frac{1}{11}\begin{pmatrix} a & 6 & 9 \\ 9 & -6 & 2 \\ 6 & b & c \end{pmatrix}.$$

6. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som speglar en vektor i $\mathbb{R}^3$ vinkelrätt i planet $x + z = 0$.

   (a) Låt $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$. Bestäm $T(\mathbf{u})$. (1p)

   (b) Bestäm avbildningsmatrisen för T i standardbasen. (2p)

   (c) Vektorerna $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\mathbf{f}_3 = (0, 1, 0)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. Bestäm avbildningsmatrisen A för T i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. (2p)