MM4001 Tentamen 2023-08-10

① Euklides algoritm:

$$726 = 15 \cdot 47 + 21,$$
$$47 = 2 \cdot 21 + 5,$$
$$21 = 4 \cdot 5 + 1,$$

därför SGD$(47, 726) = 1$. Lös ut resterna:

$$\begin{aligned} 1 &= 21 - 4 \cdot 5 \\ &= 21 - 4 \cdot (47 - 2 \cdot 21) \\ &= 9 \cdot 21 - 4 \cdot 47 \\ &= 9 \cdot (726 - 15 \cdot 47) - 4 \cdot 47 \\ &= -139 \cdot 47 + 9 \cdot 726 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $(-139, 9)$ löser hjälpekvationen $47x + 726y = 1$.

$\Rightarrow$ $(x_0, y_0) = (-1390, 90)$ löser den ursprungliga ekvationen.

Allmän lösning:

$$\begin{cases} x = -1390 - 726n, \\ y = 90 + 47n, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

(2) (a) $f(x) = x\cos x - 3\sin x$

$f'(x) = \cos x - x\sin x - 3\cos x = -2\cos x - x\sin x$

$f''(x) = 2\sin x - \sin x - x\cos x = \sin x - x\cos x$

$f'''(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x.$

Taylorpolynom av grad 2 i $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$p_2(x) = f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^2$$

$$= -3 - \tfrac{\pi}{2}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^2$$

(b) Approximation:

$$p_2\left(\tfrac{\pi}{2}-0{,}07\right) = -3 + 0{,}07\,\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}\,0{,}0049.$$

Feluppskattning: Enligt Taylors sats finns ξ mellan $\frac{\pi}{2} - 0{,}07$ och $\frac{\pi}{2}$ sådant att

$$r_2(x) := f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^3$$

gäller för $x = \frac{\pi}{2} - 0{,}07$. Därför

$$\left|r_2\left(\tfrac{\pi}{2}-0{,}07\right)\right| = \frac{|\xi\sin\xi|}{6}\,0{,}07^3$$

$$\leq \frac{\frac{\pi}{2}\cdot 1}{6}\,\underbrace{343}_{\leq 360 = 30\cdot 12}\cdot 10^{-6}$$

$$\leq 30\pi\cdot 10^{-6} = \underbrace{3\pi}_{<10}\cdot 10^{-5}$$

$$< 10\cdot 10^{-5} = 10^{-4}.$$

③ Induktionsbas: För $n=1$:

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^1-1 \\ 0 & 3^1 \end{pmatrix} \quad \text{sant.}$$

Induktionsantagande: För något $n \in \mathbb{N}$ gäller

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n-1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Induktionssteg: Vi vill visa att

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3^{n+1}-1 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

gäller för ovan n. Enligt induktionsantagandet,

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3^n-1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

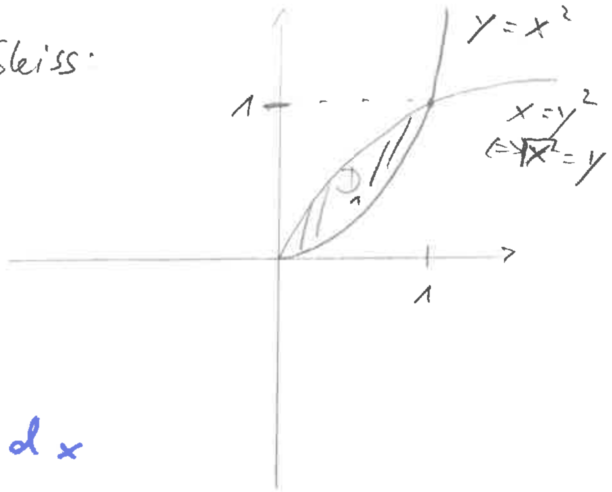
$$= \begin{pmatrix} 1 & 3^n-1+2\cdot 3^n \\ 0 & 3\cdot 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\cdot 3^n-1 \\ 0 & 3\cdot 3^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3^{n+1}-1 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Med induktionsprincipen följer påståendet.

④ (a)

Skiss:



$$\iint_{D_1} xy\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\,y\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\Big[x\,y^2\Big]_{y=x^2}^{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^5)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

(b) Vi använder polära koordinater,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \le r \le 1, \\ y = r\sin\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

D_2°

$$\iint_{D_2} \sqrt{1-(x^2-y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$\underset{\substack{\text{Subst. } u = r^2, \\ \frac{1}{2}du = r\,dr}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-u}\,du\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-1)\frac{2}{3}\Big[(1-u)^{3/2}\Big]_{u=0}^{1}\,d\theta$$

$$= \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$$

(5) (a) En normalvektor till planet är $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ortogonalprojektion:

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle}{4+1+1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{2x-y+z}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \\ 1/3\, x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z \\ -\frac{1}{3}x + 1/6\, y + \frac{5}{6}z \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

P är en ortogonal projektion olika identiteten, därför ej inverterbar

(b) Basbytesmatrisen från standardbasen till $\mathbb{B}$ är

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dessutom har F i standardbasen framställningen

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Då är matrisframställningen av F i basen $\mathbb{B}$

$$A_{\mathbb{B}} = Q A Q^{-1} = \dots = \underline{\underline{-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -35 & 13 \\ -29 & 3 \end{pmatrix}}}$$

⑥ (a) $f(x,y) = x^3 - 2xy^2 + y + 4,$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4xy + 1$$

Tangentplan:

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

$$= 4 + x - 1 - 3(y-1) = x - 3y + 6,$$

ekvivalent $\underline{x - 3y - z + 6 = 0.}$

(b) Tangentplanet har $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ som normalvektor. Det andra planet har en normalvektor $\vec{n}_\theta = \begin{pmatrix} 3\cos\theta - \sin\theta \\ 3\sin\theta + \cos\theta \\ -1 \end{pmatrix}$.

För att de inte har någon gemensam punkt måste (bl.a.) $\vec{n}$ och $\vec{n}_\theta$ vara parallella, $\vec{n} = \lambda \vec{n}_\theta$ för något λ, och den sista raden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3\cos\theta - \sin\theta \\ 3\sin\theta + \cos\theta \\ -1 \end{pmatrix}$$

ger $\lambda = 1$. Första två raderna:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{rotation med vinkel } \theta \text{ moturs}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$. Då är planen parallella, och då endast en av de går genom origot, har de inga gemens. punkt.