STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
MM2002 Matematik för naturvetenskaper I
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
2023-08-15

---

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

---

1. **(2+3 p.)** (a) Bestäm derivatan till $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x^3}{\sqrt{x}}}$; förenkla så långt som möjligt.

   (b) Betrakta funktionen $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x \ln x}}$, där $2 < x < 4$. Beräkna volymen av den kropp, som uppstår, när grafen till $g$ roteras runt $x$-axeln.

2. **(5 p.)** För varje $a \in \mathbb{R}$ bestäm antalet lösningar till det linjära ekvationssystemet $AX = B$, där $X \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

3. **(3+2 p.)** Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar:

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x \right), \qquad \lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 9x + 20}.$$

4. **(2+2+1 p.)** Betrakta funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$.

   (a) Bestäm alla punkter, i vilka $f$ antar ett lokalt minimum eller maximum.

   (b) Undersök var $f$ är konvex resp. konkav.

   (c) Antar funktionen $f$ ett globalt maximum?

5. **(3+1+1 p.)** Låt $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3)$ vara en ON-bas i rummet.

   (a) Visa att $\widetilde{\mathbb{B}} = (e_1 + e_2, -3e_2, e_1 + e_3)$ också är en bas i rummet.

   (b) Är $\widetilde{\mathbb{B}}$ även en ON-bas?

   (c) Om vektorn $\vec{v}$ har koordinater $(0, 8, 15)$ i basen $\widetilde{\mathbb{B}}$, vilka koordinater har då $\vec{v}$ i basen $\mathbb{B}$?

6. **(3+2 p.)**

   (a) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = 2xye^{x^2}$, som uppfyller $y(0) = -4$.

   (b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y''' + 3y'' - 10y' = e^x$.

Tentamensåterlämning annonseras på kurshemsidan.

**Lycka till!**