MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
25 augusti 2023

15p ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

Påminnelse. Kom ihåg att om $\mathbb{F}$ är en kropp så skriver vi

- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i $\mathbb{F}$ och
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) **(1p)** Låt $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara n olika vektorer i ett vektorrum V över en kropp $\mathbb{F}$. Ange definitionen av att $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ är en *bas* för V.
   (b) **(2p)** Visa att $\{1, x, x^2, x^3\}$ är en bas för $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$.
   (c) **(2p)** Låt $V = \mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ och låt
   $$v_1 = 1 + x, \qquad v_2 = x + x^2, \qquad v_3 = x^2 + x^3, \qquad v_4 = x^3 + 1$$
   vara fyra element i V. Avgör om vektorerna $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ är en bas för V eller inte (och kom ihåg att motivera noggrant).

2. (a) **(2p)** Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett F-vektorrum V. Ange definitionerna av begreppen *egenvektor* och *egenvärde* för T, samt vad det betyder för T att vara *diagonaliserbar.*
   (b) **(3p)** Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära operatorn (på $\mathbb{R}$-vektorrummet $\mathbb{R}^3$) som ges av
   $$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$
   Beräkna alla egenvärden för T och baser för de tillhörande egenrummen, samt avgör om T är diagonaliserbar.

3. Betrakta polynomrummet $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ med inre produkten
   $$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \qquad (\text{för } f, g \in \mathrm{P}_3(\mathbb{R})).$$
   Låt V vara delmängden till $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ som består av alla polynom p med $\int_0^1 p(x)\,dx = 0$.
   (a) **(1p)** Visa att V är ett delrum till $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$.
   (b) **(2p)** Bestäm en bas för V.
   (c) **(2p)** Bestäm två element i en *ortogonal bas* för V samt ange hur en fullständig ortogonal bas för V kan hittas som innehåller dessa två.

Var god vänd!

4. **(5p)** Avgör vilka av följande avbildningar som är diagonaliserbara relativt en ON-bas (för respektive vektorrum).

   (a) $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (b) $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ där $B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -1 & 20 & 3 \\ 2 & 3 & 30 \end{pmatrix}$

   (c) $L_C : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ där $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $L_D : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ där $D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

5. (a) **(1p)** Låt $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Ange definitionen av att A är en *ortogonal* matris.

   (b) **(4p)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$

6. (a) **(1p)** Låt V och W vara vektorrum över samma kropp F. Ange definitionen av att en avbildning $T : V \to W$ är *linjär*.

   (b) **(3p)** Låt $T : V \to W$ vara en bijektiv linjär avbildning och låt $T^{-1} : W \to V$ vara den inversa avbildningen, som uppfyller $T^{-1}(T(v)) = v$ för alla $v \in V$. Bevisa att T^{-1} är linjär.

   (c) **(1p)** Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{P}_1(\mathbb{R})$ ges av $T(a, b) = 2a + (a + b)x$. Ange en formel för den inversa avbildningen $T^{-1} : \mathrm{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$.

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en elektronisk kopia av tentan beställas från studentexpeditionen genom länken
`https://survey.su.se/Survey/48245/sv`.