MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
25 augusti 2023

Lösningsförslag

1. (a) **(1p)** Låt $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara n olika vektorer i ett vektorrum V över en kropp $\mathbb{F}$. Ange definitionen av att $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ är en *bas* för V.
   (b) **(2p)** Visa att $\{1, x, x^2, x^3\}$ är en bas för $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$.
   (c) **(2p)** Låt $V = \mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ och låt

$$v_1 = 1 + x, \qquad v_2 = x + x^2, \qquad v_3 = x^2 + x^3, \qquad v_4 = x^3 + 1$$

vara fyra element i V. Avgör om vektorerna $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ är en bas för V eller inte (och kom ihåg att motivera noggrant).

Lösning

(a) Mängden $\{v_1, \ldots, v_n\}$ utgör en bas för V om den spänner upp V och är linjärt oberoende.

(b) Eftersom varje polynom $p(x) \in \mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ kan skrivas på formen $p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$ för några skalärer a_i (dvs som en linjärkombination av vektorerna 1, x, x^2 och x^3) så spänner mängden upp $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$. Det räcker alltså nu att visa att vektorerna 1, x, x^2 och x^3 är linjärt oberoende. Om $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$ är 0-polynomet för några skalärer a_i, då måste $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Alltså är vektorerna linjärt oberoende, och därmed utgör mängden $\{1, x, x^2, x^3\}$ en bas för $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$.

(c) Vektorerna utgör inte en bas för V, eftersom de inte är linjärt oberoende:

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 = 0$$

(dvs vi kan forma en icke-trivial linjärkombination av vektorerna som ger oss 0-vektorn).

Svar: Vektorerna utgör inte en bas för V.

2. (a) **(2p)** Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett F-vektorrum V. Ange definitionerna av begreppen *egenvektor* och *egenvärde* för T, samt vad det betyder för T att vara *diagonaliserbar*.

(b) **(3p)** Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära operatorn (på $\mathbb{R}$-vektorrummet $\mathbb{R}^3$) som ges av

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Beräkna alla egenvärden för T och baser för de tillhörande egenrummen, samt avgör om T är diagonaliserbar.

Lösning

(a) En vektor $v \in V$ kallas en egenvektor för T med egenvärde $\lambda \in F$ om $v \neq 0_V$ och $T(v) = \lambda v$. Avbildningen T kallas diagonaliserbar om det finns en bas för V bestående av egenvektorer för T. Ekvivalent: om det finns en bas B för V sådan att matrisen $[T]_B^B$ är en diagonalmatris.

(b) Vi har att $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -x_1, x_3)$, så

$$T(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3) \iff x_2 = \lambda x_1, \quad -x_1 = \lambda x_2, \quad x_3 = \lambda x_3.$$

Vi har en matrisrepresentation för T, och vi vet att T:s egenvärden motsvarar egenvärdena av den motsvarande matrisen. Dessa kan enligt utlärd sats hittas genom att lösa den karaktäristiska ekvationen $\det(A - tI) = 0$:

$$\begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ -1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = 0 \iff (1-t)\begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = 0 \iff (1-t)(t^2+1) = 0 \iff t = 1$$

(eftersom vi arbetar över kroppen $\mathbb{R}$). Alltså är 1 det enda egenvärdet. Det motsvarande egenrummet E_1 definieras av

$$E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = v\} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2,\ x_2 = -x_1,\ x_3 = x_3\} = \{(0, 0, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Alltså har E_1 en bas $\{(0, 0, 1)\}$.
Eftersom T endast har 1 linjär oberoende egenvektor och $\mathbb{R}^3$ är 3-dimensionellt, så finns det ingen bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer för T, och därmed är T inte diagonaliserbar.

Svar: Det enda egenvärdet är 1, med egenrum som har bas $\{(0, 0, 1)\}$. Avbildningen T är inte diagonaliserbar.

3. Betrakta polynomrummet $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ med inre produkten

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \qquad (\text{för } f, g \in \mathrm{P}_3(\mathbb{R})).$$

Låt V vara delmängden till $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ som består av alla polynom p med $\int_0^1 p(x)\,dx = 0$.

(a) **(1p)** Visa att V är ett delrum till $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$.

(b) **(2p)** Bestäm en bas för V.

(c) **(2p)** Bestäm två element i en *ortogonal bas* för V samt ange hur en fullständig ortogonal bas för V kan hittas som innehåller dessa två.

Lösning

(a) Enligt delrumstestet räcker det att kolla att mängden V är icke-tom och att den är sluten under addition och skalärmultiplikation. Att den är icke-tom är enkelt, eftersom $0 \in V$. Sluten under addition: om $p, q \in V$, då är

$$\int_0^1 (p(x) + q(x))\,dx = \int_0^1 p(x)\,dx + \int_0^1 q(x)\,dx = 0 + 0 = 0.$$

Slutligen, sluten under skalärmultiplikation: om $p \in V$ och $a \in \mathbb{R}$ så gäller det att

$$\int_0^1 ap(x)\,dx = a\int_0^1 p(x)\,dx = a \cdot 0 = 0.$$

(b) Ett godtyckligt polynom $p \in \mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ har formen $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Detta ligger i V om och endast om

$$\int_0^1 p(x)\,dx = 0 \iff a_0 + \tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{3}a_2 + \tfrac{1}{4}a_3 = 0.$$

Denna ekvation har en 3-dimensional lösningsmängd, som t.ex. spänns upp av $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \{(1, -2, 0, 0), (1, 0, -3, 0), (1, 0, 0, -4)\}$, vilket motsvarar att V är 3-dimensionell med bas

$$1 - 2x, \quad 1 - 3x^2, \quad 1 - 4x^3.$$

(c) Vi använder Gram–Schmidts metod för detta. Först låter vi

$$u_1 = 1 - 2x$$

och noterar att

$$\|u_1\|^2 = \langle 1 - 2x,\, 1 - 2x\rangle = \int_0^1 (1 - 2x)^2\,dx = \int_0^1 (1 - 4x + 4x^2)\,dx = \tfrac{1}{3}.$$

Vi tar sedan nästa vektor u_2 som

$$u_2 = (1 - 3x^2) - \frac{\langle 1 - 3x^2,\, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = (1 - 3x^2) - \langle 1 - 3x^2,\, 1 - 2x\rangle \cdot 3\,(1 - 2x).$$

Vi beräknar:

$$\langle 1-3x^2,\, 1-2x\rangle = \int_0^1 (1-3x^2)(1-2x)\,dx = \int_0^1 1-2x-3x^2+6x^3\,dx = \left[x - x^2 - x^3 + \tfrac{3}{2}x^4\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}.$$

Alltså är

$$u_2 = (1 - 3x^2) - \tfrac{3}{2}(1 - 2x) = -\tfrac{1}{2} + 3x - 3x^2.$$

Vektorerna u_1, u_2 utgör två element i en ortogonal bas för V, då de ligger i V och är ortogonala mot varande (per Gram–Schmidt). För att hitta ett tredje element i den ortogonala basen för V kan vi fortsätta Gram–Schmidt processen genom att ta

$$u_3 = (1 - 4x^3) - \frac{\langle 1 - 4x^3,\, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle 1 - 4x^3,\, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2.$$

Svar: Vektorerna $1 - 2x$, $-\frac{1}{2} + 3x - 3x^2$ utgör två element i en ortogonal bas för V.

4. Avgör vilka av följande avbildningar som är diagonaliserbara relativt en ON-bas (för respektive vektorrum).

(a) $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ där $B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -1 & 20 & 3 \\ 2 & 3 & 30 \end{pmatrix}$

(c) $L_C : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ där $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

(d) $L_D : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ där $D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

Lösning Den reella spektralsatsen säger att en linjär operator L_X på $\mathbb{R}^n$ är diagonaliserbar relativt en ON-bas för $\mathbb{R}^n$ om och endast om matrisen X är *symmetrisk*, dvs omm $X = X^*$. Detta ger omedelbart att avbildningen i (a) inte är diagonaliserbar relativt en ON-bas för $\mathbb{R}^3$, medans den i (b) är det, då matrisen B är symmetrisk.

Den komplexa spektralsatsen säger att en linjär operator L_X på $\mathbb{C}^n$ är diagonaliserbar relativt en ON-bas för $\mathbb{C}^n$ om och endast om matrisen X är *normal*, dvs omm X och X^* kommuterar ($X\,X^* = X^*\,X$), där X^* är X:s adjungerade matris.

För (c) beräknar vi:

$$C\,C^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alltså är $C^* = 2C^{-1}$, så C och C^* kommuterar. Alltså är L_C diagonaliserbar relativt en ON-bas för $\mathbb{C}^2$.

För (d):

$$D\,D^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix},$$

medans

$$D^*\,D = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ \star & \star \end{pmatrix}.$$

Alltså är $D^*\,D \neq D\,D^*$, så L_D är inte diagonaliserbar relativt en ON-bas för $\mathbb{C}^2$, enligt den komplexa spektralsatsen.

Svar: Avbildningarna L_B och L_C är ortogonalt diagonaliserbara, och L_A och L_D är inte det.

5. (a) **(1p)** Låt $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Ange definitionen av att A är en *ortogonal* matris.

   (b) **(4p)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$

Lösning

(a) Matrisen A kallas ortogonal om $A\,A^* = A^*A = I$.

(b) Vi söker, per definition, en faktorisering $A = U\,\Sigma\,V^*$ där U och V är ortogonala matriser och

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix},$$

där $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ är A:s singulärvärden.
Vi vet att de nollskilda singulärvärdena för A precis motsvarar kvadratrötterna ur de nollskilda egenvärdena till A^*A, så vi beräknar denna matris.

Vi har att

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

För att hitta egenvärdena beräknar vi det karateristiska polynomet

$$\det(A^*A - t\cdot I) = (1-t)\big((1-t)^2 - 1\big) = (1-t)(2-t)(-t).$$

Alltså är egenvärdena 0, 1 och 2, och därmed är singulärvärdena $\sigma_1 = \sqrt{2}$ och $\sigma_2 = 1$. Alltså ges matrisen Σ av

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

För att hitta matrisen V beräknar vi egenvektorer för A^*A motsvarande egenvärdena.

För egenvärdet 2 subtraherar vi 2 från diagonalelementen och räknar ut nollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nollrummet, och därmed egenrummet E_2, spänns alltså upp enhetsvektorn

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

För egenvärdet 1 räknar vi liknande:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Här spänns egenrummet E_1 upp av enhetsvektorn

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dessa två vektorer kommer utgöra de första två kolonnerna av V. Som den tredje kolonnen tar vi enhetsvektorn

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som är ortogonal mot v_1 och v_2. Alltså har vi

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Det sista steget är att hitta en matris U som uppfyller villkoren, vilket vi gör genom att bestämma dess kolonner u_1, u_2, u_3. För detta använder vi att $Av_i = \sigma_i u_i$ för $i = 1, 2$, dvs att $u_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i$:

$$u_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} Av_1 = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$u_2 = \tfrac{1}{1} Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dessa två vektorer utgör kolonnerna av den ortogonala matrisen U:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså har vi:

Svar: En singulärvärdesuppdelning ges av $A = U\,\Sigma\,V^*$, där

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (a) **(1p)** Låt V och W vara vektorrum över samma kropp F. Ange definitionen av att en avbildning $T : V \to W$ är *linjär*.

   (b) **(3p)** Låt $T : V \to W$ vara en bijektiv linjär avbildning och låt $T^{-1} : W \to V$ vara den inversa avbildningen, som uppfyller $T^{-1}(T(v)) = v$ för alla $v \in V$. Bevisa att T^{-1} är linjär.

   (c) **(1p)** Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{P}_1(\mathbb{R})$ ges av $T(a, b) = 2a + (a + b)x$. Ange en formel för den inversa avbildningen $T^{-1} : \mathrm{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$.

Lösning

(a) Avbildningen T kallas linjär om det gäller att $T(u+v) = T(u)+T(v)$ och $T(av) = aT(v)$ för alla vektorer $u, v \in V$ och skalärer $a \in F$.

(b) Vi börjar med att visa att $T^{-1}(w + z) = T^{-1}(w) + T^{-1}(z)$ för alla $w, z \in W$. Låt $w, z \in W$. Eftersom T är bijektiv finns det $u, v \in V$ sådana att $T(u) = w$ och $T(v) = z$, nämligen $u = T^{-1}(w)$ och $v = T^{-1}(z)$. Därför är

$$T^{-1}(w + z) = T^{-1}(T(u) + T(v)) = T^{-1}(T(u + v)) = u + v = T^{-1}(w) + T^{-1}(z).$$

Vid den andra likheten här använde vi att T är linjär.

Vi visar härnäst att $T^{-1}(aw) = aT^{-1}(w)$ för alla vektorer $w \in W$ och skalärer $a \in F$. Låt igen $v = T^{-1}(w)$, så att $w = T(v)$. Då är

$$T^{-1}(aw) = T^{-1}(aT(v)) = T^{-1}(T(av)) = av = aT^{-1}(w).$$

Alltså är T^{-1} linjär.

(c) Låt $r + tx \in \mathrm{P}_1(\mathbb{R})$. Då är

$$\begin{aligned}
& T^{-1}(r + tx) = (a, b) \\
\iff \quad & T(a, b) = r + tx \\
\iff \quad & 2a + (a + b)x = r + tx \\
\iff \quad & 2a = r \text{ och } a + b = t \\
\iff \quad & a = \tfrac{1}{2}r \text{ och } b = t - \tfrac{1}{2}r.
\end{aligned}$$

Alltså ges T^{-1} av

$$T^{-1}(r + tx) = (\tfrac{1}{2}r, t - \tfrac{1}{2}r).$$