MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del A
23 augusti 2023

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng och minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen.

Problemdel

1. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut?
$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln(k))^2}{\ln(e+k^2)} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\cos(k\pi)\sin\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

2. (a) Kan
$$f(x,y)=\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+xy+y^2},\quad (x,y)\neq(0,0),$$
utvidgas till en kontinuerlig funktion på hela $\mathbb{R}^2$ genom ett lämpligt val av $f(0,0)$?
(b) Existerar $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x)$ för funktionen ovan?

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen
$$f(x,y)=1+e^x(x^2y-y)$$
samt avgör deras karaktär.

4. (a) Förklara varför funktionen $f(x,y)=1-2x+y$ antar ett största och ett minsta värde under bivillkoret $x^2+2y^2=x$.
(b) Bestäm dessa värden samt ange i vilka punkter de antas.

5. Betrakta funktionen
$$f(x,y,z)=\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$
på mängden $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x>0,y>0,z>0\}$.
Vad är supremum för f på D? Vad är infimum för f på D?

Teoridel

6. Formulera och bevisa Cauchys integralkriterium.

7. Formulera och bevisa kedjeregeln för sammansatta funktioner av typen $t\mapsto f(g(t),h(t))$.

Skrivningen beräknas vara rättad måndag august 28 2023. Se kurshemsidan för information om återlämning.