MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del A
24 november 2022

**Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng och minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen.**

**Problemdel**

1. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut?

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2e+k)} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{1}{k}\right).$$

2. (a) Avgör om

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

kan utvidgas till en kontinuerlig funktion på cirkelskivan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 4\}$.

(b) Existerar $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y)$?

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = x + \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + xy^2 - x\right)$$

samt avgör deras karaktär.

4. (a) Förklara varför funktionen $f(x,y) = x - y$ antar ett största och ett minsta värde under bivillkoret $x^2 + 3y^2 = 1$.

(b) Bestäm dessa värden samt ange i vilka punkter de antas.

(c) Antas största och minsta värde om det ursprungliga bivillkoret ersätts med bivillkoret $x^2 + 3y = 1$?

5. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$$

på mängden $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > y > 0\}$.

Vad är supremum för $f$ på $D$? Vad är infimum för $f$ på $D$?

**Teoridel**

6. Definiera riktningsderivata och gradient. Formulera och bevisa sats om samband mellan riktningsderivata och gradient. Visa också att en funktion av två variabler växer snabbast i gradientens riktning.

7. Formulera och bevisa Cauchys integralkriterium.

Skrivningen beräknas vara rättad onsdag 30 november 2022. Se kurshemsidan för information om återlämning.