MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del A
12 oktober 2023

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng och minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen.

Problemdel

1. (a) Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut?

$$(i)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \qquad (ii)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 \ln(e+k^2)}$$

(b) Är följande generaliserade integral konvergent?

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 \ln(e+x^2)}$$

Lösningsförslag:

(a) (i) Vi observerar att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ *är en känd konvergent serie när* $p > 1$. *I detta fall har vi* $p = 3$ *vilket ger absolutkonvergens av den givna serien, och därmed även konvergens.*

(ii) Vi noterar att $k^2 \log(e+k^2) \geq k^2$ *för* $k \geq 1$. *Vi kan därmed tillämpa jämförelsekriterium I, jämföra med den konvergenta serien* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ *och dra slutsatsen att den givna serien konvergerar. Eftersom dess termer vidare är positiva följer absolutkonvergens trivialt.*

(b) Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2 \ln(e+x^2)}$ *är kontinuerlig och positiv på* $[2, \infty)$, *samt avtagande på det aktuella intervallet vilket kan inses genom att derivera* f *och observera att* $f'(x) < 0$ *för* $x \in [2, \infty)$. *Således kan vi utnyttja Cauchys integralkriterium och vår slutsats från (a) (ii) för att dra slutsatsen att den generaliserade integralen är konvergent.*

2. Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar.

$$(a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^2}{x^2+y^2} \qquad (b)\ \lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+xy} \qquad (c)\ \lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},0)} \frac{y^2\sin(2x)}{(x-\frac{\pi}{2})^2+y^2}$$

Lösningsförslag:

(a) Vi har $f(x,0) = 1/x$ *för* $x \neq 0$ *och eftersom* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ *inte existerar, existerar inte heller gränsvärdet i (a).*

(b) Vi har i polära koordinater

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2}{r^2 + r^2\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{1+\sin\theta\cos\theta}.$$

vilket visar att det efterfrågade gränsvärdet inte existerar.

(c) Taylors formel tillämpad på $\sin(2x)$ *ger att i en omgivning till* $x = \frac{\pi}{2}$ *så gäller*

$$\sin(2x) = -2(x-\frac{\pi}{2}) + \mathcal{O}((x-\frac{\pi}{2})^3).$$

Sätt $z = x - \frac{\pi}{2}$. Då fås

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},0)} \frac{y^2\sin(2x)}{(x-\frac{\pi}{2})^2+y^2} = \lim_{(z,y)\to(0,0)} \frac{-2y^2z + y^2\mathcal{O}(z^3)}{z^2+y^2}.$$

Gränsvärdet till höger kan nu beräknas i polära koordinater. Sätt $z = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$. Då fås

$$\lim_{(z,y)\to(0,0)} \frac{-2y^2z + y^2\mathcal{O}(z^3)}{z^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{-2r^3\sin^2\theta\cos\theta + \mathcal{O}(r^5)}{r^2} = \lim_{r\to 0}(-2r\sin^2\theta\cos\theta + \mathcal{O}(r^3)) = 0.$$

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = e^y(x^2y + x^2 + y)$$

samt avgör deras karaktär.

Lösningsförslag:

Vi noterar först att f är godtyckligt många gånger deriverbar i hela planet. Vi söker alltså efter punkter där $\nabla f = (0,0)$. Vi har

$$\nabla f = e^y(2x(y+1), 1 + y + x^2(y+2)).$$

Eftersom exponentialfunktionen är nollskild för alla reella argument fås från $\nabla f = (0,0)$ de två ekvationerna

$$2x(y+1) = 0 \quad \textit{och} \quad 1 + y + x^2(y+2) = 0.$$

Den första har lösningar $x = 0$ samt $y = -1$. Insättning av $x = 0$ i den andra ekvationen ger $y = -1$ medan insättning av $y = -1$ i den andra ekvationen ger att $x^2 = 0$ det vill säga $x = 0$.

Således har den givna funktionen endast en stationär punkt nämligen $(0,-1)$. För att bestämma denna punkts karaktär ställer vi upp den associerade kvadratiska formen. Vi har

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^y(y+1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^y(2 + y + x^2(y+3))$$

samt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2xe^y(y+2).$$

Vi ser nu att $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,-1) = 0$ medan $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,-1) = e^{-1}$ vilken ger den positivt semidefinita formen

$$Q(h,k) = e^{-1}k^2.$$

Vi behöver alltså genomföra en ytterligare undersökning för att avgöra karaktären hos $(0,-1)$. Vi ser att $f(0,-1) = -\frac{1}{e}$ samt $f(x,-1) = -\frac{1}{e}$, oberoende av x. Således är $(0,-1)$ ej strikt lokal extrempunkt.

4. (a) Förklara varför funktionen $f(x,y) = 1 - xy$ antar ett största och ett minsta värde under bivillkoret $a^2x^2 + y^2 = 1$ när $a > 0$.

   (b) Bestäm för varje $a > 0$ dessa värden samt ange i vilka punkter de antas.

   (c) Antar f ett största och ett minsta värde under bivillkoret om istället $a = 0$?

   Lösningsförslag:

   (a) Vi observerar att $a^2x^2 + y^2 = 1$ för varje $a > 0$ beskriver en ellips i planet med centrum i origo, vilket är en kompakt mängd. Eftersom f är ett polynom i två variabler och således en kontinuerlig funktion ger satsen om extremvärden att f antar ett största och ett minsta värde under bivillkoret.

   (b) Sätt $g(x,y) = a^2x^2 + y^2 - 1$. Vi har $\nabla f = -(y,x)$ samt $\nabla g = (2a^2x, 2y)$. Vi ser genast att $\nabla g = (0,0)$ endast när $(x,y) = (0,0)$ och detta är inte en punkt på ellipsen. För att finna stationära punkter till f under bivillkoret $g = 0$ undersöker vi när ∇f och ∇g är parallella.

Detta ger villkoret

$$0 = \begin{vmatrix} -y & -x \\ 2a^2x & 2y \end{vmatrix} = -2y^2 + 2a^2x^2.$$

Vi får alltså att $y^2 = a^2x^2$. *Insättning i bivillkoret ger* $a^2x^2 + a^2x^2 = 1$, *vilket ger* $x^2 = \frac{1}{2a^2}$ *eller, eftersom* $a > 0$, *att* $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}a}$. *Detta ger i sin tur* $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ *och från (a) vet vi att största respektive minsta värde till* f *under bivillkoret antas i de fyra punkterna* $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}a}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Slutligen får vi det minsta värdet $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}a}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}a}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2a}$ *och det största värdet* $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}a}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}a}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \frac{1}{2a}$.

(c) Om $a = 0$ *degenererar bivillkoret till* $y^2 = 1$. *Vi har alltså att hitta eventuella största och minsta värde till* $f(x,y) = 1 - xy$ *när* $y = \pm 1$. *Vi har dock* $f(x,1) = 1 - x$ *och* $\lim_{x\to\pm\infty}(1-x) = \pm\infty$. *Alltså antas inget sörsta och inget minsta värde under bivillkoret när* $a = 0$.

5. Betrakta funktionen

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2-xyz}$$

på mängden $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0, y > 0, z > 0\}$.

Vad är supremum för f på D? Vad är infimum för f på D?

Lösningsförslag:

Vi observerar först att exponentialfunktionen antar positiva värden för alla reella argument. Vi har därför $\inf_D f \geq 0$. *Att infimum i själva verket är lika med* 0 *kan inses genom att betrakta*

$$f(x,x,x) = e^{2x^2-x^3} = e^{-x^3(1-\frac{2}{x})}$$

och observera att

$$\lim_{x\to\infty} e^{2x^2-x^3} = 0.$$

Vidare är f *obegränsad, och med andra ord* $\sup_D f = \infty$. *Vi kan nämligen betrakta*

$$f(x, \sqrt{x}, \sqrt{x}) = e^{x^2+x-x^2} = e^x \to \infty, \quad x \to \infty.$$

Teoridel

6. Visa att $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

7. Formulera och bevisa Cauchys rotkriterium och d'Alemberts kvotkriterium för serier.

Skrivningen beräknas vara rättad måndag august 28 2023. Se kurshemsidan för information om återlämning.