MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Kursansvarig: Bashar Saleh

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
20 oktober 2023

15p ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

Påminnelse. Kom ihåg att om $\mathbb{F}$ är en kropp så skriver vi

- $P_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i $\mathbb{F}$.
- $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.
- $M_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $n \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) **(1p)** Låt V och W vara två vektorrum över en kropp $\mathbb{F}$. Definiera vad det innebär för en funktion $T\colon V \to W$ att vara en linjär avbildning.

   (b) **(4p)** Låt $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som ges av
$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} 2p(0) \\ p(1) \\ 3p'(-1) \end{pmatrix}.$$
   Är T inverterbar? Om ja, beräkna $T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Om nej, undersök om $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ligger i bildrummet.
   (Tips: bestäm matrisen för T relativt standardbaserna.)

2. (a) **(2p)** Låt $A \in M_n(\mathbb{F})$ vara en diagonaliserbar matris. Är A^j diagonaliserbar för alla positiva heltal j?

   (b) **(2p)** Betrakta matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$
   Är A diagonaliserbar? Om ja, finn en inverterbar matris Q så att $Q^{-1}AQ$ är en diagonalmatris.

   (c) **(1p)** Bestäm A^{100} där A är matrisen från (b)-delen. Elementen i matrisen kan uttryckas i termer av linjärkombinationer av potenser av reella tal.

3. (a) **(2p)** Låt V vara ett n-dimensionellt inre produktrum och låt $y \in V$ vara ett nollskilt element i V. Låt $T\colon V \to \mathbb{F}$ vara den linjära avbildningen som ges av
$$T(v) = \langle v, y\rangle.$$
   Bestäm rangen för T och dimensionen av nollrummet till T. (Tips: använd dimensionssatsen)

(b) **(3p)** Betrakta inre produkten på $M_2(\mathbb{R})$ given av

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

Bestäm en bas för nollrummet till $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T(A) = \langle A, y \rangle$ där $y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. (a) **(1p)** Definiera begreppet ”ON-bas” för ett inre produktrum. Du kan utgå från att begreppet ”bas” redan är känt.

   (b) **(2p)** Betrakta inre produkten på $P_1(\mathbb{R})$ given av

   $$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)(1+x)dx.$$

   Bestäm en ON-bas för $P_1(\mathbb{R})$ relativt denna inre produkt.

   (c) **(2p)** Bestäm en bas för det ortogonala komplementet till $W = \operatorname{span}\{x\}$ betraktat som ett delrum till inre produktrummet $P_1(\mathbb{R})$ definierat i (b)-delen.

5. (a) **(1p)** Låt $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ vara en matris. Bevisa att om λ är ett egenvärde för A^*A, då gäller det att $\lambda \geq 0$. (Ledning: det kan vara användbart att använda att $\langle v, v \rangle = v^*v$ för standard inre produkten på $\mathbb{C}^n$.)

   (b) **(4p)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{C}).$$

6. Låt V vara ett reellt vektorrum av ändlig dimension. Låt $T\colon V \to V$ vara en linjär operator på V.

   (a) **(1p)** Att T är ortogonalt diagonaliserbar är ekvivalent med en annan egenskap för T enligt spektralsatsen. Vilken egenskap är det? (OBS! V är ett reellt vektorrum.)

   (b) **(2p)** Kan T vara diagonaliserbar och normal utan att vara ortogonalt diagonaliserbar?

   (c) **(2p)** Betrakta $\mathbb{R}^2$ med en inre produkt given av

   $$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2$$

   och låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara given av

   $$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}.$$

   Bestäm $T^*\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan tentan hämtas ut från studentexpeditionen under öppettiderna: tisdagar 11:45-12:45.