MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Pavel Kurasov

Lösningar till tentan
Matematik för Naturvetare 1,
6 hp
25 oktober 2023

1 Vi förenklar gränsvärdet

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)}{(x-2)}=\frac{3+5}{3-2}=8.$$

Vi använder produktregeln flera gånger:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2 x/2-1}{x^2}\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=-\frac{1}{2}.$$

2 Vi beräknar determinanten;

$$\det\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 2 & 2 & a\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}=2+a^2+6-2-2a-3a=a^2-5a+6.$$

Determinanten är lika med 0 bara om $a=2$ eller $a=3$. För alla $a\neq 2,3$ har systemet entydig lösning $(x,y,z)=(0,0,0)$.

För $a=2$ tar systemet följande form:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Gausselimination leder till

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Man får lösningen $(x,y,z)=s(1,0,-1),\ s\in\mathbb{R}$.

För $a=3$ tar systemet följande form:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Gausselimination leder till

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Man får lösningen $(x,y,z)=t(-7,1,4),\ t\in\mathbb{R}$.

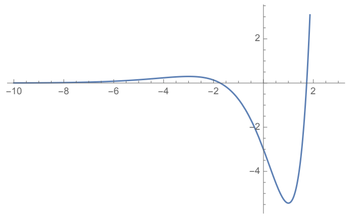
3 Funktionen antar negativa värden mellan $-\sqrt{3}$ och $\sqrt{3}$. Derivatan är lika med:

$$f'(x)=e^x(x^2+2x-3).$$

Den är lika med noll i punkterna $x=-3$ och $x=1$. Funktionen är växande på intervallerna $(-\infty,-3]$ och $[1,\infty)$. Den är avtagande på intervallet $[-3,1]$.

$x=1$ är global minimipunkt med $f(1)=-2e$. $x=-3$ är lokal maximipunkt. Funktionen växer mot $+\infty$ då $x\to\infty$.

Värdemängden är intervallet $[-2e,\infty)$.



4 Polynomet har reella koefficienter och $z_1 = -2 + i$ är en rot. Den andra roten ska vara $z_2 = -2 - i$. Detta innebär att polynomet är delbar med $(z + 2 - i)(z + 2 + i) = z^2 + 4z + 5$. Polynomdivisionen ger oss

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 10z + 25 = (z^2 + 4z + 5)(z^2 - 2z + 5).$$

Kvadratiska ekvationen

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$

har lösningar

$$z_{3,4} = 1 \pm 2i.$$

Vi hittade alla fyra rötter.

5 Vi får direkt:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{f_1} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$
$$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} \Leftrightarrow \vec{f_2} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

samt

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{2}(\vec{f_1} - \vec{f_2}), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{2}(\vec{f_1} + \vec{f_2}).$$

Vektorrena bildar en bas.

$$\vec{v} = e_1 + 2e_2 = \frac{1}{2}(\vec{f_1} - \vec{f_2}) + 2\frac{1}{2}(\vec{f_1} + \vec{f_2}) = \frac{3}{2}\vec{f_1} + \frac{1}{2}\vec{f_2}.$$

Korrdinaterna i bas $(\vec{f_1}, \vec{f_2})$ är $(3/2, 1/2)$.

6 Först ska vi leta efter lösningen till den homogena ekvationen:

$$2y''' - 7y'' + 2y' + 3y = 0.$$

Substitutionen $y = e^{rx}$ ger

$$2r^3 - 7r^2 + 2r + 3 = 0.$$

Vi ser direkt att $r = 1$ löser ekvationen. Polynomdivisionen ger oss

$$0 = (r - 1)(2r^2 - 5r - 3) = (r - 1)(r - 3)(r + 1/2).$$

Lösningen till den homogena ekvationen är:

$$y_{\text{hom}} = Ae^x + Be^{3x} + Ce^{-x/2}.$$

Eftersom e^{3x} löser den homogena ekvationen, letar vi efter den partikulära lösningen på formen $y_{\text{part}} = Dxe^{3x}$. Substitutionen i ekvationen ger:

$$D\left(54xe^{3x} + 54e^{3x} - 7(6e^{3x} + 9xe^{3x}) + 2(e^{3x} + 3xe^{3x}) - 3xe^{3x}\right) = 28e^{3x}$$
$$\Rightarrow D = 2.$$

Den allmänna lösningen till ekvationen blir:

$$y = y_{\text{part}} + y_{\text{hom}} = 2xe^{3x} + Ae^x + Be^{3x} + Ce^{-x/2}.$$

För att hitta lösningen som uppfyller begynnelsevillkor beräknar vi derivatorna:

$$\begin{cases} y(0) &= A+B+C &= 1 \\ y'(0) &= A+3B-1/2C+2 &= 5 \\ y''(0) &= A+9B-1/4C+12 &= 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C &= 1 \\ A+3B-1/2C &= 3 \\ A+9B-1/4C &= 9 \end{cases}$$

Lösningen till systemet är $A=0, B=1, C=0$ ger lösningen till diff. ekvationen:

$$y = (1+2x)e^{3x}.$$