MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del B
8 januari 2024

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna, krävs för godkänt.

1. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet
$$\mathbf{u} = (x-1, 2y, z^2 + 2z + 1)$$
ut ur sfären $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9\}$.

2. (a) **(Teoriuppgift)** Vad menas med att ett vektorfält $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$ har en potential i $\mathbb{R}^3$? Är potentialer entydigt bestämda? (1p)

   (b) Finns det några potentialer $U(x, y, z)$ i $\mathbb{R}^3$ till vektorfältet
$$\mathbf{u} = (2x - y + z^2, -x, 2xz)$$
som uppfyller $U(0, y, z) > 0$? Ange i sådana fall samtliga sådana potentialer. (4p)

3. (a) (**Teoriuppgift**) Definiera rotationen av ett vektorfält i $\mathbb{R}^3$. (1p)

   (b) Beräkna kurvintegralen av vektorfältet
$$\mathbf{u} = \big(\sin x - y^3, \cos y + x^3, xyz\big)$$
längs med skärningen av planet $z = 4$ och ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, orienterad medurs. (4p)

4. (a) (**Teoriuppgift**) Definiera begreppet analytisk funktion av en komplex variabel. (1p)

   (b) (**Teoriuppgift**) Formulera Cauchys sats och Cauchys integralformel. (1p)

   (b) Beräkna följande kurvintegraler där $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 4\}$ är orienterad moturs.
$$(i) \int_\gamma \frac{dz}{\bar{z}} \qquad (ii) \int_\gamma \frac{z+1}{z^3 + z^2 - 72z} dz \qquad (iii) \int_\gamma \frac{e^z z - e^z}{z^2 + 17i} dz \qquad (3p)$$

5. (a) (**Teoriuppgift**) Kan Greens formel användas för att beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma \frac{1}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} dx + \frac{y^2}{x^2 + y^2} dy$$
där γ är en cirkel med radie $r > 0$ och centrum i origo, orienterad moturs? (1p)

   (b) Beräkna värdet på kurvintegralen i (a) för varje $r > 0$. (4p)

6. (a) (**Teoriuppgift**) Låt $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ vara en följd av reellvärda funktioner på intervallet $[0, 1]$. Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar punktvis till en funktion f. Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar likformigt till en funktion f. (2p)

   (b) (**Teoriuppgift**) Visa att om $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ är en följd av kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$ som konvergerar likformigt till en funktion f så är f kontinuerlig. (3p)

Skrivningen beräknas vara rättad fredag 19 januari 2024. Se kurshemsidan för information om återlämning.