MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del B
8 januari 2024

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna, krävs för godkänt.

1. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (x-1, 2y, z^2+2z+1)$$

ut ur sfären $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9\}$.

Lösningsförslag:

Vi har givet ett polynomiellt vektorfält samt en slät yta, en sfär med radie 3, *som utgör randen till ett kompakt område i* $\mathbb{R}^3$, *ett slutet klot. Vi kan således tillämpa Gauss sats och dra slutsatsen att*

$$\int_S \mathbf{u}\cdot d\mathbf{S} = \int_B \mathrm{div}\mathbf{u}\, dxdydz.$$

Vi har

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 1 + 2 + 2 + 2z = 5 + 2z = 3 + 2(z+1)$$

och därmed

$$\int_B \mathrm{div}\mathbf{u}\, dxdydz = 3\mathrm{vol}(B) + \int_B 2(z+1)dxdydz = 3\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 + 0 = 108\pi,$$

där vi har utnyttjat att den senare trippelintegralen är lika med 0 *av symmetriskäl. (Alternativt kan trippelintegralen beräknas i rympolära koordinater centrerade i* $(1,0,-1)$*.)*

2. (a) **(Teoriuppgift)** Vad menas med att ett vektorfält $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x,y,z)$ har en potential i $\mathbb{R}^3$? Är potentialer entydigt bestämda? (1p)

(b) Finns det några potentialer $U(x,y,z)$ i $\mathbb{R}^3$ till vektorfältet

$$\mathbf{u} = (2x - y + z^2, -x, 2xz)$$

som uppfyller $U(0,y,z) > 0$? Ange i sådana fall samtliga sådana potentialer. (4p)

Lösningsförslag:

(a) Se kursboken PB2 för dessa definitioner.

(b) Om en sådan potential U *existerar måste vi ha*

$$\nabla U = (2x - y + z^2, -x, 2xz).$$

Integration av $\partial_y U = -x$ *ger* $U(x,y,z) = -xy + \phi(x,z)$, *där* ϕ *beror av* x *och* z *men ej på* y. *Genom att derivera med avseende på* z *fås villkoret*

$$\partial_z \phi(x,z) = 2xz.$$

Vi integrerar detta och får $U(x,y,z) = -xy + xz^2 + \psi(x)$, *där* ϕ *endast beror av* x. *Partiell derivering med avseende på* x *ger villkoret*

$$-y + z^2 + \psi'(x) = 2x - y + z^2,$$

det vill säga $\psi'(x) = 2x$. Detta ger slutligen $\psi(x) = x^2 + C$, där C är en konstant. En allmän potential erhålles alltså på formen

$$U(x, y, z) = x^2 - xy + xz^2 + C.$$

Vi söker samtliga potentialer som är positiva på mängden $\{(0, y, z)\} \subset \mathbb{R}^3$. Vi har emellertid $U(0, y, z) = C$, så villkoret leder alltså till kravet $C > 0$.

Samtliga potentialer till det givna vektorfältet som uppfyller kravet $U(0, y, z) > 0$ ges alltså av

$$U(x, y, z) = x^2 - xy + xz^2 + C,$$

där C är en positiv konstant.

3. (a) (**Teoriuppgift**) Definiera rotationen av ett vektorfält i $\mathbb{R}^3$. (1p)

   (b) Beräkna kurvintegralen av vektorfältet

   $$\mathbf{u} = \left(\sin x - y^3, \cos y + x^3, xyz\right)$$

   längs med skärningen av planet $z = 4$ och ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, orienterad medurs. (4p)

   Lösningsförslag:

   (a) Se kursboken PB2 för en definition av rotation av vektorfält.

   (b) Den givna ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ är en kon i $\mathbb{R}^3$, vars skärning med planet $z = 4$ således är en cirkel med radie 2. Vidare Är vektorfältet $\mathbf{u}$ är godtyckligt många gånger partiellt deriverbart med avseende på alla tre variabler. Således kan vi åberopa Stokes sats med den medurs orienterade cirkeln C som randkurva till en cirkelskiva E med radie 2, som är paralell med xy-planet och har en normal på formen $(0, 0, -1)$.

   Vi beräknar på sedvanlig väg

   $$\text{rot}\mathbf{u} = (xz, -yz, 3(x^2 + y^2))$$

   och erhåller efter övergång till polära koordinater

   $$\int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_E \text{rot}\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{x^2+y^2 \leq 4} 3(x^2 + y^2)dxdy = -3\int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 drd\theta$$

4. (a) (**Teoriuppgift**) Definiera begreppet analytisk funktion av en komplex variabel. (1p)

   (b) (**Teoriuppgift**) Formulera Cauchys sats och Cauchys integralformel. (1p)

   (b) Beräkna följande kurvintegraler där $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 4\}$ är orienterad moturs.

   $$(i) \int_\gamma \frac{dz}{\bar{z}} \qquad (ii) \int_\gamma \frac{z+1}{z^3 + z^2 - 72z} dz \qquad (iii) \int_\gamma \frac{e^z z - e^z}{z^2 + 17i} dz \qquad (3p)$$

   Lösningsförslag:

   (a) Se Kurskompendiet, avsnitt 3, för denna definition.

   (b) Se Kurskompendiet, avsnitt 4, för denna definition.

   (c) Vi beräknar kurvintegralen i (i) med hjälp av parametriseringen

   $$z(t) = 4e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

   Då fås

   $$z'(t) = 4ie^{it}$$

   samt

   $$\frac{1}{\overline{z(t)}} = \frac{1}{4e^{-it}} = \frac{1}{4}e^{it}$$

vilket leder till integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{dz}{\bar{z}} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} e^{it} \cdot 4ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} ie^{2it} dt = 0.$$

Låt oss nu beräkna integralen i (ii). Vi har

$$z^3 + z^2 - 72z = z(z^2 + z - 72),$$

vilket innebär att polynomet i integrandens nämnare har ett nollställe innanför cirkeln med radie 4. *Med hjälp av kvadratkomplettering ser vi vidare att* $z^2 + z - 72 = (z-8)(z+9)$ *vilket betyder att* $z = 0$ *är det enda nollstället med* $|z| \leq 4$. *Vi skriver nu*

$$\frac{z+1}{z^3 + z^2 - 72z} = \frac{z+1}{(z-8)(z+9)} \frac{1}{z}$$

och tillämpar Cauchys integralformel på funktionen

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-8)(z+9)}$$

vilken är analytisk innanför och i en omgivning av γ. *Detta ger slutligen*

$$\int_\gamma \frac{z+1}{z^3 + z^2 - 72z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{1}{(-8) \cdot 9} = -\frac{\pi i}{36}.$$

Vi behandlar nu kurvintegralen i (iii). Vi observerar först att rötterna till $z^2 + 17i$ *ligger på en cirkel med radie* $\sqrt{17}$. *Eftersom* $17 > 16$ *har vi* $\sqrt{17} > 4$, *vilket i sin tur innebär att integranden i (iii) är analytisk i en cirkelskiva vars radie är strikt större än* 4. *Därmed kan Cauchys sats tillämpas, och integralens värde beräknas till* 0.

5. (a) (**Teoriuppgift**) Kan Greens formel användas för att beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{1}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} dx + \frac{y^2}{x^2 + y^2} dy$$

där γ är en cirkel med radie $r > 0$ och centrum i origo, orienterad moturs? (1p)

(b) Beräkna värdet på kurvintegralen i (a) för varje $r > 0$. (4p)

Lösningsförslag:

(a) Låt $P(x,y) = \frac{1}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ *och* $Q(x,y,) = \frac{1}{x^2+y^2}$. *Observera att* $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$, *vilket betyder att både* P *och* Q *är definierade överallt, utom i origo där både* P *och* Q *är odefinierade och i själva verket har oegentliga gränsvärden. Därmed är förutsättningarna för Greens formel ej uppfyllda.*

(b) Vi beräknar kurvintegralerna med hjälp av parameteriseringen

$$x(t) = r\cos t, \quad y(t) = r\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Vi har då

$$x'(t) = -r\sin t, \quad y'(t) = r\cos t,$$

samt

$$P(x(t), y(t)) = \frac{1}{r^4}, \quad Q(x(t), y(t)) = \frac{r^2 \sin^2 t}{r^2} = \sin^2 t.$$

Alltså fås

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{r^3} + r\sin^2 t \cos t \right) dt = 0 + r[\frac{1}{3}\sin^3 t]_0^{2\pi} = 0.$$

6. (a) (**Teoriuppgift**) Låt $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av reellvärda funktioner på intervallet $[0,1]$. Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar punktvis till en funktion f. Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar likformigt till en funktion f. (2p)

   (b) (**Teoriuppgift**) Visa att om $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ är en följd av kontinuerliga funktioner på $[0,1]$ som konvergerar likformigt till en funktion f så är f kontinuerlig. (3p)

   Lösningsförslag:

   (a) Se Kurskompendiet, avsnitt 5, för dessa definitioner.

   (b) Se Kurskompendiet, sats 6.1, för ett bevis.

Skrivningen beräknas vara rättad fredag 19 januari 2024. Se kurshemsidan för information om återlämning.