Matematiska institutionen, Stockholms universitet

Tentamen i MT7027, Riskmodeller och reservsättning inom sakförsäkring, 14 mars 2023, 14:00–19:00.

Examinator: Filip Lindskog, lindskog@math.su.se

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Återlämning: meddelas via kursforum.

Argument och beräkningar ska vara tydliga och lätta att följa.

Eventuellt kan approximationerna $1-\Phi(1)\approx 0.159$, $1-\Phi(2)\approx 0.023$, $\Phi^{-1}(0.95)\approx 1.64$, $\Phi^{-1}(0.975)\approx 1.96$, $\Phi^{-1}(0.995)\approx 2.58$ vara användbara, Φ är fördelningsfunktionen för standardnormalfördelningen.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Uppgift 1

Antag att ett Poisson(λ)-fördelat antal stormar sker det kommande året och att varje storm ger upphov till ett Poisson(μ)-fördelat antal rapporterade stormskador. Antag att antalet rapporterade skador orsakade av en viss storm är oberoende av antalet rapporterade skador orsakade av en annan storm, och oberoende av det totala antalet stormar. Bestäm väntevärde och varians för det totala antalet rapporterade stormskador. (10 p)

Uppgift 2

Den totala skadekostnaden (i enheten miljoner kronor) det kommande året för en viss produkt antas ha fördelningsfunktion

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{6}\right)^{-4}, \quad x > 0.$$

Antag att försäkringsbolaget köpt ett SL-skydd med nivån 6 (miljoner kronor).

(a) Bestäm fördelningsfunktionen för den del av totala skadekostnaden som återförsäkringsbolaget ska betala till försäkringsbolaget som köpt SL-skyddet. (5 p)

(b) Rita (ungefärligt) fördelningsfunktionen för den totala skadekostnaden för försäkringsbolaget då effekten av SL-skyddet beaktas. (5 p)

Uppgift 3

Betrakta ett försäkringsbolag vars solvens analyseras i början av året. Antag att tillgångarna (exkluderat premieintäkter) har ett värde X i slutet av året och att X är $N(\mu_X, \sigma_X^2)$. Antag att försäkringsprodukterna genererar ett nettoresultat (premieintäkter minus skadekostnader) Y is slutet av året och att Y är $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Antag att X och Y är oberoende. Antag att försäkringsbolaget överväger att teckna proportionell återförsäkring svarande mot att försäkringsbolaget behåller en andel p av intäkter och skadekostnader från försäkringsprodukterna. Ange en olikhet, i termer av angivna storheter, som måste vara uppfylld för att försäkringsbolaget ska vara solvent, givet att $\mathrm{VaR}_{0.005}$ definierar solvens. (10 p)

Uppgift 4

I Tabell 1 visas, för $i \in \{1, \dots, 5\}$ och $j \in \{1, \dots, 3\}$, belopp $C_{i,j}$ som svarar mot summerade betalningar till följd av skador under skadeår i och utvecklingsår $1, \dots, j$. Beloppen för $i + j \leq 6$ är kända medan beloppen är okända för $i + j > 6$. Antag att belopp som svarar mot olika skadeår är oberoende och att det existerar konstanter f_1, f_2 och σ_1, σ_2 så att, för $j = 1, 2$,

$$\mathrm{E}[C_{i,j+1} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = f_j C_{i,j}, \quad \mathrm{Var}(C_{i,j+1} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}.$$

Bestäm väntevärde och varians för den totala summan som återstår att betala som skadeersättning till kunder till följd av redan inträffade skador, uttryckta i kända belopp $C_{i,j}$ med $i + j \leq 6$ och okända konstanterna f_1, f_2 och σ_1, σ_2. (10 p)

	1	2	3
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$
4	$C_{4,1}$	$C_{4,2}$	$\mathbf{C_{4,3}}$
5	$C_{5,1}$	$\mathbf{C_{5,2}}$	$\mathbf{C_{5,3}}$

Table 1: Skadedata $C_{i,j}$ med kända kumulativa utbetalningar ($i + j \leq 6$), samt framtida okända kumulativa utbetalningar för $i + j > 6$.

Uppgift 5

Antag att X och Y betecknar totala skadekostnader under det kommande året för två försäkringsprodukter. Antag att den simultana fördelningsfunktionen för X och Y ges av $F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$ där

$$F_X(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{10}\right)^{-5}, \quad F_Y(y) = \Phi\left(\frac{y-5}{2}\right),$$
$$C(u, v) = \exp\left(-\left((-\log(u))^2 + (-\log(v))^2\right)^{1/2}\right),$$

där log betecknar naturliga logaritmen. Antag att försäkringsbolaget tecknat separata SL-skydd för skadekostnaderna X och Y med nivåer som bägge svarar mot skydd mot de 10% värsta utfallen av skadekostnader. Bestäm sannolikheten för att åtminstone ett av SL-skydden betalar ersättning till försäkringsbolaget. (10 p)

Uppgift 1

Antalet rapporterade stormskador kan skrivas $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ där $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ och oberoende termer $X_k \sim \mathrm{Pois}(\mu)$, oberoende av N.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[S] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[S \mid N]] = \mathrm{E}[N\,\mathrm{E}[X_1]] = \mathrm{E}[N]\,\mathrm{E}[X_1] \\
&= \lambda\mu, \\
\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(S \mid N)] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[S \mid N]) \\
&= \mathrm{E}[N\,\mathrm{Var}(X_1)] + \mathrm{Var}(N\,\mathrm{E}[X_1]) = \mathrm{E}[N]\,\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(N)\,\mathrm{E}[X_1]^2 \\
&= \lambda(\mu + \mu^2).
\end{aligned}$$

Uppgift 2

(a) $\mathrm{P}(\max(S-6,0)=0) = \mathrm{P}(S \le 6) = 1 - 2^{-4} = 15/16$. För $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\max(S-6,0) \le x) &= 1 - \mathrm{P}(\max(S-6,0) > x) = 1 - \mathrm{P}(S > 6 + x) \\
&= 1 - \left(2 + \frac{x}{6}\right)^{-4}
\end{aligned}$$

Alltså,

$$\mathrm{P}(\max(S-6,0) \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \left(2 + \frac{x}{6}\right)^{-4}, & x \ge 0. \end{cases}$$

(b)

$$\mathrm{P}(\min(S,6) \le x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{x}{6}\right)^{-4}, & x < 6, \\ 1, & x \ge 6. \end{cases}$$

Uppgift 3

Om $W \sim N(\mu, \sigma^2)$ så gäller att $\mathrm{VaR}_{0.005}(W) = d(0,1)(-\mu + \sigma\Phi^{-1}(0.995))$. Här gäller att

$$W = \mu_X + \sigma_X Z_X + p(\mu_Y + \sigma_Y Z_Y) \sim N(\mu_X + p\mu_Y, \sigma_X^2 + p^2\sigma_Y^2).$$

och positionen är solvent, dvs $\mathrm{VaR}_{0.005}$-acceptabel, om

$$-\mu_X - p\mu_Y + \left(\sigma_X^2 + p^2\sigma_Y^2\right)^{1/2}\Phi^{-1}(0.995) \le 0$$

d.v.s. om

$$\mu_X + p\mu_Y \ge \left(\sigma_X^2 + p^2\sigma_Y^2\right)^{1/2}\Phi^{-1}(0.995).$$

Uppgift 4

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[C_{4,3} - C_{4,2} \mid \mathcal{D}] &= \mathrm{E}[C_{4,3} - C_{4,2} \mid C_{4,1}, C_{4,2}] = (f_2 - 1)C_{4,2}, \\
\mathrm{E}[C_{5,3} - C_{5,1} \mid \mathcal{D}] &= \mathrm{E}[C_{5,3} - C_{5,1} \mid C_{5,1}] \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{E}[C_{5,3} \mid C_{5,1}, C_{5,2}] \mid C_{5,1}] - C_{5,1} \\
&= (f_1 f_2 - 1)C_{5,1}, \\
\mathrm{Var}(C_{4,3} - C_{4,2} \mid \mathcal{D}) &= \mathrm{Var}(C_{4,3} - C_{4,2} \mid C_{4,1}, C_{4,2}) = \sigma_2^2 C_{4,2}, \\
\mathrm{Var}(C_{5,3} - C_{5,1} \mid \mathcal{D}) &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(C_{5,3} - C_{5,1} \mid C_{5,1}, C_{5,2}) \mid C_{5,1}] \\
&\quad + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[C_{5,3} - C_{5,1} \mid C_{5,1}, C_{5,2}] \mid C_{5,1}) \\
&= \mathrm{E}[\sigma_2^2 C_{5,2} \mid C_{5,1}] + \mathrm{Var}(f_2 C_{5,2} - C_{5,1} \mid C_{5,1}) \\
&= (f_1 \sigma_2^2 + f_2^2 \sigma_1^2) C_{5,1}
\end{aligned}
$$

Alltså, p.g.a. oberoende mellan skadeår fås

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[C_{4,3} - C_{4,2} + C_{5,3} - C_{5,1} \mid \mathcal{D}] &= (f_2 - 1)C_{4,2} + (f_1 f_2 - 1)C_{5,1}, \\
\mathrm{Var}(C_{4,3} - C_{4,2} + C_{5,3} - C_{5,1} \mid \mathcal{D}) &= \sigma_2^2 C_{4,2} + (f_1 \sigma_2^2 + f_2^2 \sigma_1^2) C_{5,1}.
\end{aligned}
$$

Uppgift 5

Den sökta sannolikheten är $1 - F(F_X^{-1}(0.9), F_Y^{-1}(0.9)) = 1 - C(0.9, 0.9)$.

$$
\begin{aligned}
C(p,p) &= \exp\Big(- \Big(2(-\log(p))^2 \Big)^{1/2} \Big) = \exp\Big(\sqrt{2} \log(p) \Big) = \exp\Big(\log\big(p^{\sqrt{2}}\big) \Big) \\
&= p^{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

vilket ger svaret $1 - 0.9^{\sqrt{2}}$.