Matematiska institutionen, Stockholms universitet

Tentamen i MT7027, Riskmodeller och reservsättning inom sakförsäkring, 19 april 2023, 14:00–19:00.

Examinator: Filip Lindskog, lindskog@math.su.se

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Återlämning: meddelas via kursforum.

Argument och beräkningar ska vara tydliga och lätta att följa.

Eventuellt kan approximationerna $1-\Phi(1) \approx 0.159$, $1-\Phi(2) \approx 0.023$, $\Phi^{-1}(0.95) \approx 1.64$, $\Phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$, $\Phi^{-1}(0.995) \approx 2.58$ vara användbara, Φ är fördelningsfunktionen för standardnormalfördelningen.

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Uppgift 1

Ett försäkringsbolag tillhandahåller den 1-åriga försäkringsprodukten Fritidshuset och har tecknat 1000 sådana kontrakt för det kommande året. Försäkringsbolaget vill modellera antalet försäkringar med skadehändelser under en vinterperiod. Antag att samtliga skadehändelser rapporteras. Antag att, över många år, skador under perioden rapporteras för 5% av de tecknade försäkringarna. En vinter kan vara av typen Mild eller Hård. Givet en vinter av en viss typ inträffar skador oberoende av varandra. Givet en vinter av typen Mild är sannolikheten för skada 2% för ett givet försäkringskontrakt. Givet en vinter av typen Hård är sannolikheten för skada 8% för ett givet försäkringskontrakt. Bestäm variansen för antalet försäkringskontrakt med skador. (10 p)

Uppgift 2

För en viss försäkringsprodukt modelleras antalet skador N med en Poissonfördelning med väntevärde λ. Skadebeloppen $X_1, X_2, \dots$ antas vara oberoende och oberoende av antalet skador och antas alla vara fördelade enligt $\mathrm{P}(X \leq x) = 1 - (1 + x/\sigma)^{-\alpha}$, där $\sigma > 0$ och $\alpha > 2$. Ett återförsäkringsbolag erbjuder ett XL-skydd som innebär att återförsäkringsbolaget betalar den del av skadebeloppen som överstiger nivån u. XL-skyddets pris är $(1+c)\,\mathrm{E}[R]$, där R betecknar den totala skadekostnaden för återförsäkringsbolaget. Härled ett explicit uttryck för priset. (10 p)

Uppgift 3

Betrakta ett försäkringsbolag med likvida tillgångar med marknadsvärdet 2 000 000 idag 1 januari och åtaganden mot försäkringstagare vars värde 31 december har fördelning $N(\mu_L, \sigma_L^2)$ där $\mu_L = 1\,000\,000$ och $\sigma_L = 200\,000$. Antag att en krona investerad i aktiemarknaden har ett värde 31 december med fördelning $N(\mu_A, \sigma_A^2)$ där $\mu_A = 1.3$ och $\sigma_A = 0.5$. Antag att en krona investerad i obligationer har ett värde 31 december med fördelning $N(\mu_R, \sigma_R^2)$ där $\mu_R = 1$ och $\sigma_R = 0.1$. Antag att aktierisk, ränterisk och försäkringsrisk är oberoende. Kan försäkringsbolaget placera allt sitt kapital i aktier och vara solvent enligt solvenskriteriet $\mathrm{VaR}_{0.005}$ med 1-årshorizont? Kan försäkringsbolaget placera allt sitt kapital i obligationer och vara solvent enligt solvenskriteriet $\mathrm{VaR}_{0.005}$ med 1-årshorizont? (10 p)

Uppgift 4

I Tabell 1 visas, för $i \in \{1, \ldots, 5\}$ och $j \in \{1, \ldots, 3\}$, belopp $C_{i,j}$ som svarar mot summerade betalningar till följd av skador under skadeår i och utvecklingsår $1, \ldots, j$. Inget betalas efter utvecklingsår 3. Beloppen för $i+j \leq 6$ är kända medan beloppen är okända för $i+j > 6$. Antag att belopp som svarar mot olika skadeår är oberoende och att det existerar konstanter f_1, f_2 och σ_1, σ_2 så att, för $j = 1, 2$,

$$\mathrm{E}[C_{i,j+1} \mid C_{i,1}, \ldots, C_{i,j}] = f_j C_{i,j}, \quad \mathrm{Var}(C_{i,j+1} \mid C_{i,1}, \ldots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}.$$

För 6:e skadeårets totala skadekostnad, skatta andelarna (i termer av observerade belopp $C_{i,j}$ med $i + j \leq 6$ och $1 \leq i \leq 5$) som betalas under utvecklingsåren 1, 2 respektive 3. (10 p)

	1	2	3
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$
4	$C_{4,1}$	$C_{4,2}$	$\mathbf{C_{4,3}}$
5	$C_{5,1}$	$\mathbf{C_{5,2}}$	$\mathbf{C_{5,3}}$

Table 1: Skadedata $C_{i,j}$ med kända kumulativa utbetalningar $(i + j \leq 6)$, samt framtida okända kumulativa utbetalningar för $i + j > 6$.

Uppgift 5

För $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$, låt $C_{i,j}$ vara ackumulerat utbetalt belopp till försäkringstagare under j utvecklingsår för skador under skadeår i. Inget betalas efter utvecklingsår 4. Den övre triangeln $\{C_{i,j} : i + j \leq 5\}$ är känd idag, tid 0. Antag att det existerar konstanter $f_j > 0$, $j \in \{1, \ldots, 3\}$, så att, för alla i, j, $\mathrm{E}[C_{i,j+1} \mid C_{i,1}, \ldots, C_{i,j}] = f_j C_{i,j}$, och att $(C_{i,1}, \ldots, C_{i,4})$ och $(C_{j,1}, \ldots, C_{j,4})$ är oberoende för $i \neq j$.

	1	2	3	4
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	$\mathbf{C_{2,4}}$
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$\mathbf{C_{3,3}}$	$\mathbf{C_{3,4}}$
4	$C_{4,1}$	$\mathbf{C_{4,2}}$	$\mathbf{C_{4,3}}$	$\mathbf{C_{4,4}}$

Table 2: Skadedata $C_{i,j}$ med kända kumulativa utbetalningar $(i + j \leq 5)$, samt framtida okända kumulativa utbetalningar för $i + j > 5$.

Låt $(X_1, \ldots, X_T)$ vara det framtida kassaflödet till försäkringstagarna orsakat av skador under tidigare skadeår. Antag att det värderas enligt

$$L_0 = \sum_{t=1}^{T} e^{-rt} \, \mathrm{E}[X_t \mid \mathcal{F}_0]$$

idag (tid 0), där $\mathrm{E}[X_t \mid \mathcal{F}_0]$ betecknar betingat väntevärde med avseende på informationen tillgänglig vid tid 0 och r är en given ränta. Beräkna L_0 explicit i termer av kända utbetalda belopp och givna konstanter. (10 p)

Uppgift 1

Skriv $N = I_1 + \cdots + I_n$, där $n = 1000$.

$$\mathrm{Var}(N) = E[N^2] - E[N]^2 = nE[I_1] + n(n-1)E[I_1 I_2] - n^2 E[I_1]^2$$

där $E[I_1] = 0.05$. Vidare gäller $0.05 = 0.02(1 - P(H)) + 0.08P(H)$ vilket ger sannolikheten $P(H) = 0.5$ för en hård vinterperiod.

$$E[I_1 I_2] = 0.02^2 \cdot 0.5 + 0.08^2 \cdot 0.5 = 0.0034$$

jämfört med oberoendefallet $E[I_1 I_2] = 0.05^2 = 0.0025$.

$$\mathrm{Var}(N) = n(0.05 + (n-1)0.0034 - n0.0025) = 946.6$$

I oberoendefallet blir variansen $n(0.05+(n-1)0.0025-n0.0025) = 47.5$, dvs betydligt lägre.

Uppgift 2

Sätt $M = \sum_{k=1}^{N} I\{X_k > u\}$, dvs räkna endast skador över nivån u. Det gäller att att M är Poissonfördelad med parameter λp där $p = \mathrm{P}(X > u) = (1 + u/\sigma)^{-\alpha}$. Det gäller att $R = \sum_{k=1}^{M} Y_k$, där $M, Y_1, Y_2, \ldots$ är oberoende och

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y > y) &= \mathrm{P}(X - u > y \mid X > u) = \frac{\mathrm{P}(X > u + y)}{\mathrm{P}(X > u)} = \Big(\frac{\sigma + u + y}{\sigma + u}\Big)^{-\alpha} \\ &= \Big(1 + \frac{y}{\sigma + u}\Big)^{-\alpha}\end{aligned}$$

R har en sammansatt Poissonfördelning med väntevärde $\mathrm{E}[R] = \lambda p \frac{\sigma+u}{\alpha-1}$.

Uppgift 3

Om $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ så gäller att, med $Z \sim N(0,1)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_{0.005}(X) &= \mathrm{VaR}_{0.005}(\mu + \sigma Z) = F^{-1}_{-d(0,1)(\mu+\sigma Z)}(0.995) \\ &= d(0,1)\big(-\mu + \sigma\Phi^{-1}(0.995)\big),\end{aligned}$$

dvs $\mathrm{VaR}_{0.005}(X) \le 0$ omm $\mu \ge \sigma\Phi^{-1}(0.995) \approx 2.58 \cdot \sigma$. Här, med $C = 2 \cdot 10^6$ och andelen p i aktier,

$$\begin{aligned}X &= pC(\mu_A + \sigma_A Z_A) + (1-p)C(\mu_R + \sigma_R Z_R) - \mu_L - \sigma_L Z_L \\ &\stackrel{\mathrm{d}}{=} pC\mu_A + (1-p)C\mu_R - \mu_L + \big(p^2C^2\sigma_A^2 + (1-p)^2C^2\sigma_R^2 + \sigma_L^2\big)^{1/2} Z.\end{aligned}$$

Enbart aktier (insolvent):

$$\mu = 1.6 \cdot 10^6, \quad \sigma^2 = 4 \cdot 10^{12} \cdot 0.25 + 4 \cdot 10^{10}, \quad 2.58 \cdot \sigma \approx 2\,631\,094 > \mu$$

Enbart obligationer (solvent):

$$\mu = 10^6, \quad \sigma^2 = 4 \cdot 10^{12} \cdot 0.01 + 4 \cdot 10^{10}, \quad 2.58 \cdot \sigma \approx 729\,734.2 < \mu.$$

Uppgift 4

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[C_{4,3} - C_{4,2} \mid \mathcal{D}] &= \mathrm{E}[C_{4,3} - C_{4,2} \mid C_{4,1}, C_{4,2}] = (f_2 - 1)C_{4,2}, \\
\mathrm{E}[C_{5,3} - C_{5,1} \mid \mathcal{D}] &= \mathrm{E}[C_{5,3} - C_{5,1} \mid C_{5,1}] \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{E}[C_{5,3} \mid C_{5,1}, C_{5,2}] \mid C_{5,1}] - C_{5,1} \\
&= (f_1 f_2 - 1)C_{5,1}, \\
\mathrm{Var}(C_{4,3} - C_{4,2} \mid \mathcal{D}) &= \mathrm{Var}(C_{4,3} - C_{4,2} \mid C_{4,1}, C_{4,2}) = \sigma_2^2 C_{4,2}, \\
\mathrm{Var}(C_{5,3} - C_{5,1} \mid \mathcal{D}) &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(C_{5,3} - C_{5,1} \mid C_{5,1}, C_{5,2}) \mid C_{5,1}] \\
&\quad + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[C_{5,3} - C_{5,1} \mid C_{5,1}, C_{5,2}] \mid C_{5,1}) \\
&= \mathrm{E}[\sigma_2^2 C_{5,2} \mid C_{5,1}] + \mathrm{Var}(f_2 C_{5,2} - C_{5,1} \mid C_{5,1}) \\
&= (f_1 \sigma_2^2 + f_2^2 \sigma_1^2) C_{5,1}
\end{aligned}
$$

Alltså, p.g.a. oberoende mellan skadeår fås

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[C_{4,3} - C_{4,2} + C_{5,3} - C_{5,1} \mid \mathcal{D}] &= (f_2 - 1)C_{4,2} + (f_1 f_2 - 1)C_{5,1}, \\
\mathrm{Var}(C_{4,3} - C_{4,2} + C_{5,3} - C_{5,1} \mid \mathcal{D}) &= \sigma_2^2 C_{4,2} + (f_1 \sigma_2^2 + f_2^2 \sigma_1^2) C_{5,1}.
\end{aligned}
$$

Uppgift 5

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_1 \mid \mathcal{F}_0] &= (f_3 - 1)C_{2,3} + (f_2 - 1)C_{3,2} + (f_1 - 1)C_{4,1}, \\
\mathrm{E}[X_2 \mid \mathcal{F}_0] &= f_2(f_3 - 1)C_{3,2} + f_1(f_2 - 1)C_{4,1}, \\
\mathrm{E}[X_3 \mid \mathcal{F}_0] &= f_1 f_2 (f_3 - 1)C_{4,1}
\end{aligned}
$$

vilket ger

$$
\begin{aligned}
L_0 = e^{-r}&\big((f_3 - 1)C_{2,3} + (f_2 - 1)C_{3,2} + (f_1 - 1)C_{4,1}\big) \\
&+ e^{-2r}\big(f_2(f_3 - 1)C_{3,2} + f_1(f_2 - 1)C_{4,1}\big) \\
&+ e^{-3r} f_1 f_2 (f_3 - 1)C_{4,1}
\end{aligned}
$$