MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del B
13 februari 2023

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna, krävs för godkänt.

1. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (xz + x\sin^2 y, yz, z\cos^2 y)$$

ut ur cylindern

$$\mathcal{Z} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 4, 1 \leq z \leq 2\}.$$

Lösningsförslag:

Vi noterar att det givna vektorfältet är godtyckligt många gånger deriverbart, medan den givna cylindern plus topp-och bottenlock bestående av cirkelskivor utgör en sluten och styckvis slät yta i $\mathbb{R}^3$. Vi kan således tillämpa Gauss sats.

Vi har

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = z + \sin^2 y + z + \cos^2 y = 1 + 2z,$$

och volymsintegralen över den solida cylindern blir efter övergång till cylindriska koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ och $z = z$

$$\iiint (1+2z)dxdydz = \int_{r=0}^{2}\int_{\theta=-\pi}^{\pi}\int_{z=1}^{2}(1+2z)rdrd\theta dz = 4\pi\int_1^2(1+2z)dz = 16\pi.$$

2. (a) (**Teoriuppgift**) Definiera rotationen av ett vektorfält i $\mathbb{R}^3$. (1p)

(b) Beräkna rotationen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (2xyz^2 + y, x^2z^2 + z, 2x^2yz + x) \quad (2p)$$

(c) Beräkna kurvintegralen av $\mathbf{u}$ med moturs orientering längst med randen av kvadraten i xy-planet vars hörn är $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ och $(0,1,0)$. (2p)

Lösningsförslag:

(a) Se kursboken för en definition av begreppet rotation.

(b) Vi ställer upp hjälpdeterminanten

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2xyz^2 + y & x^2z^2 + z & 2x^2yz + x \end{vmatrix}$$

och beräknar på så vis rotationen till $(-1,-1,-1)$.

(c) Låt oss utnyttja Stokes sats på det släta vektorfältet $\mathbf{u}$ och en kvadrat i planet. Vi har för kvadraten i xy-planet vars rand den givna orienterade kurvan utgör en kompatibel normalvektor given av $(0,0,1)$. Då fås $\mathrm{rot}\mathbf{u}\cdot(0,0,1) = -1$, en konstant funktion, och kvadraten har sidlängden lika med 1.

Därmed fås

$$\int_\gamma \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = \iint_K \mathrm{rot}\mathbf{u}d\mathbf{S} = -\mathrm{Area}(K) = -1.$$

3. (a) (**Teoriuppgift**) Vad menas med att ett vektorfält $\mathbf{u} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ är konservativt? (1p)

(b) Låt γ vara snittet mellan de två mängderna

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 9\} \quad \text{och} \quad P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0\}.$$

Beskriv mängden γ. (1p)

(c) Visa att det finns minst ett val av $a, b, c \in \mathbb{R}$, ej alla noll, sådant att kurvintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (ayz - y^2, xz + bxy, xy + cz^2)$$

längst med γ är noll. (3p)

Lösningsförslag:

(a) Se kursboken av Persson-Böiers för en definition.

(b) Mängden S är en sfär i $\mathbb{R}^3$ med radie lika med 3. Denna skärs av planet P vilket innehåller origo. Således är mängden γ en storcirkel på sfären.

(c) En möjlighet är att välja parametrar a, b, c sådana att det resulterande vektorfältet är konservativt. Om vi först integrerar första komponenten erhåller vi vi $axyz - xy^2 + \phi(y, z)$, där ϕ ej beror av x. Partiell derivering av denna funktion med avseende på y ger därefter $axz - 2xy + \frac{\partial \phi}{\partial y}$, och genom att välja $a = 1$ och $b = -2$ samt $\phi = \phi(z)$ har vi precis uttrycket i andra komponenten av det givna fältet. Vi har nu att $U(x, y, z) = xyz - xy^2 + \frac{c}{3}z^3$ där c är en godtycklig reell konstant är ett konservativt fält. Då kurvan γ enligt (b) är enkel och sluten följer nu att kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{u} d\mathbf{r} = 0$ för $a = 1$, $b = -2$ och c godtyckligt.

4. (a) Funktionen $u(x, y) = xe^x \sin y + ye^x \cos y$ är realdelen av en analytisk funktion $f(z)$. Avgör vilken av följande funktioner som ger en imaginärdel till $f(z)$, samt identifiera funktionen $f(z)$. (3p)

$$(i)\, v(x, y) = ye^x \sin y - xe^x \cos y \quad (ii)\, v(x, y) = xe^y \cos y + ye^x \sin x$$

$$(iii)\, v(x, y) = ye^y \sin y - xe^y \cos x \quad (iv)\, v(x, y) = xy \sin x - xy \cos x.$$

(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{ze^z + \cos(z^2)}{z^4 + z^2 + 1} dz$$

där $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = \frac{3}{4}\}$. (2p)

Lösningsförslag:

(a) Vi drar oss till minnes formeln $e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$, där $z = x + iy$. Utseendet hos den givna funktionen u antyder att vi kan pröva att beräkna $ze^z = xe^x \cos y - ye^x \sin y + i(xe^x \sin y + ye^x \cos y)$. Vi ser sedan att realdelen av $-ize^z$ sammanfaller med den givna funktionen u, och att imaginärdelen av samma funktion är funktionen i alternativ (i). Alltså är $f(z) = -ize^z$ den sökta funktionen (upp till en konstant) och de övriga alternativen är uteslutna på grund av entydighet.

(b) Vi betraktar först integrandens nämnare vilken, efter ett mellansteg där substitutionen $w = z^2$ används, inses ha faktoriseringen $z^4 + z^2 + 1 = (z + \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2})(z - \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2})$. Samtliga rötter till nämnaren ligger alltså på enhetscirkeln i komplexa planet. Således är integranden en analytisk funktion i en cirkelskiva som helt innesluter kurvan γ. Cauchys integralsats utsäger då att den sökta kurvintegralens värde är lika med 0.

5. (a) (**Teoriuppgift**) Formulera och bevisa *Greens formel.* (3p)

(b) Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma x dy$ moturs längst med den slutna kurvan i planet som beskrivs av $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + y^2 = \frac{3}{4}$. (2p)

Lösningsförslag:

(a) Se kursboken Persson-Böiers, Analys i flera variabler, för ett bevis.

(b) Låt oss först observera att uttrycket som definierar γ kan skrivas på formen

$$\frac{1}{4}(x-1)^2 + y^2 = 1$$

vilket är uttrycket för en ellips med centrum i $(1,0)$. Vi kan nu tillämpa Greens formel för att erhålla

$$\int_\gamma x dy = \iint_E dx dy = \text{Area}(E)$$

där $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{4}(x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$. Den sistnämnda arean kan beräknas med hjälp av ett elliptiskt variabelbyte (se PB2, s. 266) till 2π.

6. Låt $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av reellvärda kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,1]$.

   (a) (**Teoriuppgift**) Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar punktvis till en funktion f. Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar likformigt till en funktion f. (1p)

   (b) (**Teoriuppgift**). Konvergerar $\{x^{4k}(1+x^{4k})\}_{k=1}^{\infty}$ likformigt på $[0,1]$? (1p)

   (c) (**Teoriuppgift**) Visa att om $\{f_k\}$ konvergerar likformigt mot f så gäller

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)dx = \int_0^1 f(x)dx. \qquad (3p)$$

   Lösningsförslag:

   (a) Se kurskompendiet för dessa definitioner.

   (b) Observera att $\lim_{k\to\infty} f_k(1) = 2$ medan $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ för alla $0 \leq x < 1$. Följden f_k konvergerar alltså punktvis mot en funktion f som är diskontinuerlig på intervallet $[0,1]$. Således kan $\{f_k\}$ ej konvergera likformigt.

   (c) Se kurskompendiet för ett bevis.

Skrivningen beräknas vara rättad fredag 24 februari 2023. Se kurshemsidan för information om återlämning.