

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 poäng ger garanterat godkänt.

1. Bestäm samtliga $x \in \mathbb{Z}$ som uppfyller att (5p)

$$10x \equiv 2 \pmod{2023},$$

samt ange hur många av dessa som ligger i intervallet $[3237, 5260]$.

2. Beräkna (4p)

$$\sum_{k=2}^{21} (3 \cdot 4^k + 3k).$$

(Obs: summan startar inte vid index 1. Svaret får innehålla en hög potens utan att denna beräknas uttryckligen.)

3. Ett polynom $p(z)$ med komplexa koefficienter ger resten 7 vid division med $(z - 2)$ och resten i vid division med $(z - i)$. Bestäm resten vid divisionen av $p(z)$ med $(z - 2)(z - i)$. (5p)

4. Rita följande mängder i det komplexa talplanet: (6p)

(a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 1\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| \leq 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = |z - 2i|\}$

(d) $\{2w, 2w^2, 2w^3, 2w^4, 2w^5\}$ där $w = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

5. I denna fråga ska svaren vara fullt uträknade, och kom ihåg att motivera fullständigt. (Alla svar ligger mellan 200 och 1000.)

(a) På hur många sätt kan sex personer A, B, C, D, E, F stå på kö? (1p)

(b) På hur många sätt kan sex personer A, B, C, D, E, F stå på kö om F inte ska stå sist i kön? (2p)

(c) På hur många sätt kan sex personer A, B, C, D, E, F stå på kö om A och B inte ska stå bredvid/intill varandra? (2p)

6. (a) För $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ange definitionen av $\operatorname{sgd}(a, b)$. (1p)

(b) Låt $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, och låt $d = \operatorname{sgd}(a, b)$. Bevisa att $\operatorname{sgd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$. (4p)