MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning i
Analys del 2, Matematik I, 5 hp
den 21 februari 2024

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade.

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

1. Bestäm minimum och maximum av (5p)
$$f(x) = \frac{|1 - x^2|}{1 + x^2}$$
på intervallet $[0, 2]$.

2. Beräkna Maclaurinpolynomet p_2 av grad 2 till funktionen (5p)
$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$
samt visa att felet som begås när $f(x)$ ersätts med $p_2(x)$ är mindre än $2 \cdot 10^{-4}$ för $-0,1 \leq x \leq 0,1$.

3. Visa med hjälp av integraluppskattning att serien (5p)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{e^k}$$
konvergerar och att dess värde är högst $\frac{5}{e}$.

4. Beräkna (5p)
$$\iint_D xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
där D är den del av ringen mellan cirklarna $x^2 + y^2 = 4$ och $x^2 + y^2 = 9$ som ligger i den första kvadranten, dvs. där $x \geq 0$ samt $y \geq 0$.

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen (5p)
$$2yy' = \frac{1}{x^2 - 4}$$
som uppfyller villkoret $y(1) = -2$.

6. (a) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en funktion i två variabler. Ange definitionen av en lokal minimipunkt till f. (1p)

   (b) Bestäm den enda stationära punkten till funktionen (4p)
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x^2 - 2x + y^2)(1 + y^2),$$
och visa att den är en lokal minimipunkt.