MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del B
23 februari 2024

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna, krävs för godkänt.

1. Vilket eller vilka av vektorfälten

$$(i)\,\mathbf{u}(x,y,z) = (yz, xz, xy) \quad (ii)\,\mathbf{u}(x,y,z) = \left(1 + \log(z^2+1), 0, \frac{x}{z^2+1}\right)$$

$$(iii)\,\mathbf{u}(x,y,z) = (2xy + \sin z, x^2, 2x\sin z)$$

har en potential i ellipsoiden

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + 2y^2 + 3z^2 < 1\}?$$

(Eventuell potential behöver ej anges.)

Lösningsförslag:

(i) Vi observerar att $U(x,y,z) = xyz$ är en potential för $\mathbf{u}$ i hela $\mathbb{R}^3$, och då särskilt i E.

(ii) Vi integrerar första komponenten i vektorfältet och erhåller

$$x + x\log(z^2+1) + \phi(y,z),$$

där ϕ endast beror av y och z och ej av x. När detta uttryck deriveras med avseende på z fås

$$\frac{2zx}{z^2+1} + \partial_z\phi(y,z).$$

Eftersom faktorn $2z$ saknas i täljaren i vektorfältets tredje komponent, och $\partial_z\phi$ endast beror av y och z drar vi slutsatsen att potential saknas i E.

(iii) Vi integrerar första komponenten och får $x^2y + x\sin z + \phi(y,z)$. Derivering av detta uttryck med avseende på z ger $x\cos z + \partial_z\phi(y,z)$ vilket enligt samma resonemang som i (ii) ger vid handen att potential saknas.

2. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (xz, 2yz, xy + z^2)$$

ut ur cylindern $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 4, -1 \leq z \leq 1\}$.

Lösningsförslag: *Vi har att göra med ett polynomiellt vektorfält $\mathbf{u}$ som speciellt är av klass C^∞ i hela $\mathbb{R}^3$. Vidare är den givna cylinderytan slät, och genom att lägga till två lock kan vi erhålla en sluten, styckvis slät yta. Gauss sats kan alltså tillämpas.*

Vi beräknar först

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = z + 2z + 2z = 5z.$$

Därefter beräknar vi trippelintegralen

$$\iiint_K \mathrm{div}\mathbf{u}\,dxdydz = \int_{-1}^{1} 5z\left(\iint_{x^2+y^2\leq 4} dxdy\right)dz = 20\pi\int_{-1}^{1} zdz = 0$$

där vi i andra steget har utnyttjat att integranden ej beror av variablerna x och y.

Nu återstår att beräkna bidragen från de två locken. Topplocket har den utåtriktade normalen $N_t = (0,0,1)$ medan bottenlockets utåtriktade normal är $N_b = (0,0,-1)$ vi ser vidare att integranden på topplocket blir

$$\mathbf{u}(x,y,1) = (x, 2y, xy+1) \quad \textit{vilket ger} \quad \mathbf{u}(x,y,1)\cdot N_t = xy+1$$

medan integranden på bottenlocket blir

$$\mathbf{u}(x,y,-1) = (-x,-2y,xy+1) \quad \textit{vilket ger} \quad \mathbf{u}(x,y,1)\cdot N_b = -xy-1.$$

Integrationsområdet i (x,y)-planet är i bägge fallen samma cirkelskiva varför de bägge lockintegralerna tar ut varandra.

Den sökta flödesintegralens värde är således

$$\iint_C \mathbf{u}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_K \mathrm{div} u dx dy dz - \iint_T \mathbf{u}\cdot N_t dS - \iint_B \mathbf{u}\cdot N_b dS = 0$$

3. (a) (**Teoriuppgift**) Formulera Cauchy-Riemanns ekvationer med samtliga förutsättningar. (1p)

(b) (**Teoriuppgift**) Ge ett exempel på två funktioner $u(x,y)$ och $v(x,y)$ som är kontinuerligt deriverbara, men som inte uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. (1p)

(c) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{|z|^2}{3\bar{z}+|z|^2} dz$$

där $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ är orienterad moturs. (3p)

(Ledning: Vissa identiter för komplexa tal kan vara användbara.)

Lösningsförslag:

(a) Se avsnitt 3 i kompendiet Analytiska funktioner etc. på kursens hemsida.

(b) Sätt $u(x,y) = x$ och $v(x,y) = -y$. Då är $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \bar{z}$, och vi har $\partial_x u = 1$ medan $\partial_y v = -1$. Således är Cauchy-Riemanns ekvationer ej uppfylda för detta par av funktioner.

(c) Vi observerar först att $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Denna identitet låter oss skriva om integranden för $z \neq 0$,

$$\frac{|z|^2}{3\bar{z}+|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{3\bar{z}+z\bar{z}} = \frac{z}{3+z},$$

där vi i sista steget har förkortat med $\bar{z}$. Vi har efter denna förenkling att beräkna

$$\int_\gamma \frac{z}{3+z} dz$$

men denna integral är enligt Cauchys sats lika med noll, eftersom integranden $z/(3+z)$ är analytisk innanför och i en omgivning av kurvan γ då det enda nollstället till nämnaren är $z = -3$.

4. (a) Bestäm rotationen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (\sin(\pi z), \sin(\pi z), \pi(x+y-z)\cos(\pi z) - \sin(\pi z)). \qquad (2p)$$

(b) Beräkna kurvintegralen av vektorfältet i (a) längs kurvan $\{(2t, 2t+\sin(\pi t), 1+t^2) : 1 \le t \le 2\}$. (3p)

Lösningsförslag:

(a) Ansätt

$$U(x,y,z) = (x+y-z)\sin(\pi z).$$

Partiell derivering med avseende på variablerna x, y och z ger vid handen att U är en potential till det givna vektorfältet $\mathbf{u}$, som således är konservativt. En känd sats ger då att $\mathrm{rot}\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(Rotationen kan naturligtvis också beräknas med sedvanliga metoder.)

(b) Antingen har vi i (a) redan bestämt en potential, eller så har vi sett att $\mathrm{rot}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ vilket i del (b) motiverar att en potential bör bestämmas. Kurvintegralens värde ges nu av differensen av U i slutpunkten $(4, 4, 5)$ och startpunkten $(2, 2, 2)$. Eftersom $U(2, 2, 2) = U(4, 4, 5) = 0$ är den sökta kurvintegralens värde lika med 0.

5. (a) **(Teoriuppgift)** Formulera och bevisa Greens formel. (3p)

   (b) Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma y^2 dx + x dy$$
   där γ är den positivt orienterade ellipsen $x^2 + 2y^2 = 1$. (2p)

   Lösningsförslag:

   (a) Se kursboken Persson/Böiers II för en formulering av Greens formel med tillhörande bevis.

   (b) Vi utnyttjar Greens förmel för att beräkna denna kurvintegral. Sätt $\mathbf{u} = (P, Q) = (y^2, x)$, ett polynomiellt vektorfält. Vi har $\partial_y P = 2y$ och $\partial_x Q = 1$ vilket ger integranden $\partial_x Q - \partial_y P = 1 - 2y$. Vi inför elliptiska koordinater
$$x = r\cos\theta \quad \textit{och} \quad y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta$$
   och beräknar funktionaldeterminanten $J(r, \theta) = \cos\theta \cdot \frac{r}{\sqrt{2}}\cos\theta - (-r\sin\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta) = \frac{r}{\sqrt{2}}$.
   Detta ger oss dubbelintegralen
$$\iint_E (\partial_x Q - \partial_y P)\, dxdy = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \sqrt{2}r\sin\theta)\frac{r}{\sqrt{2}} drd\theta$$
   vilken kan delas upp i de två integralerna
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} rdrd\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \textit{och} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} r^2 \sin\theta drd\theta = 0.$$
   Alltså fås
$$\int_\gamma y^2 dx + x dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

6. (a) (**Teoriuppgift**) Betrakta en följd $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ av kontinuerliga funktioner $f_k\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$. Definiera vad som menas med att serien $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ konvergerar likformigt på $[0, 1]$. (2p)

   (b) (**Teoriuppgift**) Konvergerar
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{x}{1 + k^2x^2}$$
   punktvis på $[0, 1]$? Konvergerar serien likformigt på $[0, 1]$? (3p)

   Lösningsförslag:

   (a) Se avsnitt 7 i kompendiet Analytiska funktioner, etc på kursens hemsida för den efterfrågade definitionen.

   (b) Se exempel 7.1 i kompendiet för en detaljerad lösning.

Skrivningen beräknas vara rättad 1 mars 2024. Se kurshemsidan för information om återlämning.