STOCKHOLMS UNIVERSITET,
MATEMATISKA INSTITUTIONEN,
Avd. Matematisk statistik

Lösningsförslag

Tentamen: Spelteori och matematisk ekonomi (MT3005), 2024-02-22

Problem 1

Jämför med s. 36 i kursboken.

(A) För varje $b \in B$ så definierar vi

$$BR_1(b) = \{a \in A : u_1(a, b) \geq u_1(a', b) \;\; \forall a' \in A\}.$$

(B) Om $a^* \in A$ och $b^* \in B$ uppfyller

$$a^* \in BR_1(b^*)$$
$$b^* \in BR_2(a^*),$$

så är handlingsplanen (a^*, b^*) en Nashjämvikt (NJ).

Problem 2

Vi markerar de bästa responserna med * och ser att (F, F) är den enda NJen i rena strategier:

	Q	F
Q	2,2	0,3*
F	$3^*, 0$	$1^*, 1^*$

Spelet motsvarar

$$u_1(Q, Q) = u_2(Q, Q) = 2$$
$$u_1(Q, F) = u_2(F, Q) = 0$$
$$u_1(F, Q) = u_2(Q, F) = 3$$
$$u_1(F, F) = u_2(F, F) = 1.$$

Detta innebär att $u_1(a_1, a_2) = u_2(a_2, a_1)$ för alla $a_1, a_2 \in \{Q, F\}$; och således är spelet symmetriskt (per definition, jämför s. 51 i kursboken).

Problem 3

Vi markerar de bästa responserna och får

	C	D
C	2*,10*	-1,0
D	-1,-1	0*,0*

Vi drar slutsatsen att (C, C) och (D, D) är samtliga Nashjämvikter i rena strategier.

Låt p vara sanolikheten att spelare 1 väljer C och q vara sanolikheten att spelare 2 väljer C. De (förväntade) värdena blir:

$$\begin{aligned}
u_1(p,q) &= pq \cdot 2 + p(1-q)\cdot(-1) + (1-p)q\cdot(-1) + (1-p)(1-q)\cdot 0 = 4pq - p - q \\
&= p(4q-1) - q \\
u_2(p,q) &= pq \cdot 10 + p(1-q)\cdot 0 + (1-p)q\cdot(-1) + (1-p)(1-q)\cdot 0 = 11pq - q \\
&= q(11p-1).
\end{aligned}$$

Detta motsvarar bästaresponsfunktionerna

$$BR_1(q) = \begin{cases} 0, & q < 1/4 \\ [0,1], & q = 1/4 \\ 1, & q > 1/4, \end{cases}$$

och

$$BR_2(p) = \begin{cases} 0, & p < 1/11 \\ [0,1], & p = 1/11 \\ 1, & p > 1/11. \end{cases}$$

De enda paren (p,q) sådana att följande villkor håller

$$\begin{aligned} p &\in BR_1(q) \\ q &\in BR_2(p), \end{aligned}$$

är $(p,q) = (0,0)$, $(p,q) = (1,1)$ och $(p,q) = (1/11, 1/4)$ (man kan exempelvis rita en figur för att inse detta, jmfr sid 113 i Osbourne, men det inses även enkelt direkt med bästaresponsfunktionerna). Vi drar slutsatsen att dessa är tre Nashjämvikter (och att inga andra NJ finns).

Notera att $(p,q) = (0,0)$ och $(p,q) = (1,1)$ motsvarar Nashjämvikter i rena strategier (dvs. de vi hittat tidigare).

Problem 4

(A) $(p_1 - c)$ motsvarar vinst/förlust per såld enhet för företag 1. Om $p_1 < p_2$ så motsvarar $(\alpha - p_1)$ den kvantitet som företag 1 säljer, om $p_1 = p_2$ så motsvarar $(\alpha - p_1)$ den kvantitet som företag 1 och företag 2 säljer tillsammans.

(B) Vår ansats är att $(p_1, p_2) = (c, c)$ är en NJ. Notera:

- Om $(p_1, p_2) = (c, c)$ så gäller $\Pi_1 = \Pi_2 = 0$.
- Om företag 1 avviker ifrån $(p_1, p_2) = (c, c)$ genom att välja $p_1 > c = p_2$, så gäller att $\Pi_1 = 0$.
- Om företag 1 avviker ifrån $(p_1, p_2) = (c, c)$ genom att välja $p_1 < c = p_2$, så gäller att $(p_1 - c) < 0$ och $(\alpha - p_1) > 0$, varvid $\Pi_1 < 0$ (vi har här bla. använt att $c < \alpha$).
- Ovanstående innebär att $c \in BR_1(c)$; dvs $p_1 = c$ är en bästa respons för företag 1 givet att företag 2 ansätter $p_2 = c$.

På samma sätt som ovan erhålls $c \in BR_2(c)$. Det följer att $(p_1, p_2) = (c, c)$ är en NJ.

Problem 5

Vår ansats är att $(x_1, x_2) = (m, m)$ är en NJ, dvs båda går till val med valdeltagarnas politiska median-preferens och utfallet blir att kandidaterna kommer på delad första plats. Notera:

- Givet $(x_1, x_2) = (m, m)$ så blir $\Pi_1 = \Pi_2 = 1$.
- Om kandidat 1 (K1) avviker med $x_1 > x_2 = m$ så får K1 färre än 50 % av rösterna varvid K1 förlorar och vi får $\Pi_1 = 0$.
- Om K1 avviker med $x_1 < x_2 = m$ så förlorar K1 också varvid $\Pi_1 = 0$ också i detta fall.

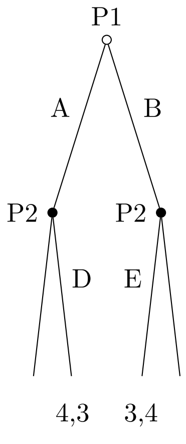
Det följer att $m \in BR_1(m)$. På samma sätt inses att $m \in BR_2(m)$. Det följer att $(x_1, x_2) = (m, m)$ är en NJ.

Problem 6

Vi erhåller följande tabell för spelet där vi även markerat alla bästa responser. I tabellen ser vi alltså att (B,CE), (A,DE) och (A,DF) är samtliga NJ:er (i rena strategier).

	CE	CF	DE	DF
A	2,1	2*,1	4*,3*	4*,3*
B	3*,4*	1,2	3,4*	1,2

Låt leta oss leta efter samtliga delspelsperfekta Nashjämvikter. I det första delspelet av längd 1 (vilket motsvarar att P2 väljer antingen C eller D) gäller att D är optimalt. I det andra delspelet av längd 1 (vilket motsvarar att P2 väljer antingen E eller F) gäller att E är optimalt. Motsvarande delspel av längd 2 ges av



Den optimala handlingen (för P1) blir således A. Det följer att den unika delspelsperfekta Nashjämvikten är (A,DE).