MT5002 – Sannolikhetsteori II – tentamen

Datum Fredag 18 augusti, 2023
Examinator Daniel Ahlberg
Hjälpmendel Formelblad som delas ut med tentamen.
Bedömning Tentamen är indelad i en basdel och en betygsgrundande del, vilka består av 20 respektive 40 poäng. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även den betygsgrundande delen, som bestämmer betyget. Inlämningsuppgifter under kursens gång har kunnat generera upp till sex bonuspoäng. Dessa räknas in i den betygsgrundande delen, men ej basdelen. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen (bonuspoäng inräknade):

	A	B	C	D	E
Basdel	14	14	14	14	14
Betygsgrundande del	38	30	20	10	0

Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Basdel

Uppgift 1. Låt X vara en icke-negativ och heltalsvärd stokastisk variabel vars sannolikhetsgenererande funktion ges av $g_X(t) = \frac{1}{10}(1+4t^2+5t^4)$. Bestäm väntevärdet av X. (5p)

Uppgift 2. Antag att du registrerar n oberoende observationer från en fördelning med ändligt väntevärde μ och varians $\sigma^2 > 0$. Avgör vilka av följande påståenden som är korrekta. Motivera ditt svar. (5p)

(a) Då n är stort kommer medelvärdet av observationerna med sannolikhet nära 1 att ligga nära μ.

(b) Då n är stort kommer summan av observationerna med sannolikhet nära $\Phi(x)$ ej överstiga $\mu n + x\sigma\sqrt{n}$, där $\Phi(x)$ är fördelningsfunktionen för en standard normalfördelning.

Uppgift 3. Avgör för vilka av följande matriser som det existerar en multivariat normalfördelning som har den givna matrisen som kovariansmatris, samt för vilken en täthet existerar. Motivera ditt svar. (5p)

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Lambda_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Uppgift 4. Låt $(X, Y)'$ vara en slumpvektor vars täthet är

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/2 & \text{för } 0 < x \leq 1, 1 < y \leq 2, \\ 1/2 & \text{för } 1 < x \leq 2, 0 < y \leq 1. \end{cases}$$

Bestäm den betingade fördelningen för Y givet $X = x$ för $x \in (0, 2]$. (5p)

Betygsgrundande del

Uppgift 5. Antag att $X = (X_1, X_2, X_3)'$ är multivariat normalfördelad med väntevärdesvektor μ och kovariansmatris Λ givna av

$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm fördelningen för $Y = (X_1 + X_3, 2X_2)'$. (3p)

(b) Avgör om Y har en täthetsfunktion, och ange i så fall denna. (3p)

(c) Beräkna den betingade fördelningen för $X_1 + X_3$ givet $X_2 = 5$. (4p)

Uppgift 6. I Brunnsviken häckar ett antal fågelarter. En av dessa kallas skäggdopping. Antalet par av denna art som skrider till häckning ett visst år följer en Poissonfördelning med väntevärde 10. Varje pars häckningsförsök resulterar i ett antal kläckta ungar (en kull) som givetvis är icke-negativt. Vi antar att varje par bara kan genomföra ett häckningsförsök per år. Ett visst år följer kullstorleken (dvs antalet ungar i en kull) en geometrisk fördelning med parameter 1/5. Storleken av var kull kan anses oberoende av andra kullar och antalet häckande par.

(a) Beräkna väntevärde och varians av antalet ungar som kläcks det givna året. (6p)

(b) Låt K beteckna antalet kullar av storlek 2 eller mindre. Bestäm väntevärdet av K. (4p)

Uppgift 7. Låt $(X, Y)'$ vara en slumpvektor med simultan täthetsfunktion som ges av

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2}e^{-y}, \quad \text{för } 0 < x < y^2,\ y > 0.$$

(a) Bestäm marginaltätheten för Y. (3p)

(b) Bestäm det betingade väntevärdet $\mathbb{E}[X|Y = y]$ för $y > 0$. (4p)

(c) Bestäm tätheten för den stokastiska variabeln $Z = \mathbb{E}[X|Y]$. (3p)

Uppgift 8. Låt $(X_n)_{n\geq 1}$ vara en följd av oberoende och likafördelade stokastiska variabler med väntevärde μ och varians σ^2. Låt $(Y_n)_{n\geq 1}$ vara en annan följd, oboeroende av den första, där Y_n är Poissonfördelad med parameter μn.

(a) Visa att Y_n/n konvergerar i sannolikhet mot μ då $n \to \infty$. (4p)

(b) Låt $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ och visa att $(S_n - \mu n)/\sqrt{Y_n}$ konvergerar i fördelning då $n \to \infty$, och bestäm gränsfördelningen. (6p)