Tenta Sanno II 230818 lösningar

1 Den sannolikhetsgenererande funktionen av en icke-negativ heltalsvärd stokastisk variabel X definieras

$$g_X(t) = \mathbb{P}(X=0) + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \cdot \mathbb{P}(X=k).$$ 2p

g_X är därmed ett polynom där koefficienten för termen med grad k anger $\mathbb{P}(X=k)$.

Det följer att $g_X(t) = \frac{1}{10}(1+4t^2+5t^4)$ är SGF för variabeln X med massfunktion

$$\mathbb{P}(X=0) = 1/10$$
$$\mathbb{P}(X=2) = 4/10$$
$$\mathbb{P}(X=4) = 5/10$$ 3p

Därmed har X väntevärdet

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\mathbb{P}(X=x) = 0\cdot\frac{1}{10} + 2\cdot\frac{4}{10} + 4\cdot\frac{5}{10} = \frac{14}{5}.$$

2 Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara stokastiska variabler som motsvarar de n observationerna. Under givna förutsättningar är dessa i.i.d. med väntevärde μ och varians $\sigma^2 > 0$. 1p
Låt $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

(a) Enligt stora talens lag gäller $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{P} \mu$ då $n \to \infty$.
Detta betyder att $\forall \varepsilon > 0$ gäller att $\mathbb{P}(|\frac{1}{n}S_n - \mu| > \varepsilon)$ är nära 1 då n är stort, så påståendet är korrekt. 2p

(b) Enligt centrala gränsvärdessatsen gäller att

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{då } n \to \infty.$$

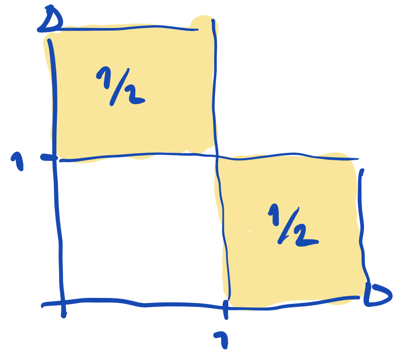
Detta betyder att då n är stort så gäller

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \approx \Phi(x).$$

Händelsen kan skrivas om som $S_n \leq \mu n + \sigma x\sqrt{n}$, 2p
så påståendet är korrekt.

3 En kovarians är alltid symmetrisk, så Δ_3 går bort. 2p
För att en täthet skall existera så krävs att kovariansmatrisen är inverterbar, eller att $\det \Delta > 0$. Detta gäller enbart för Δ_4. Notera dessutom att för X_1, X_2 oberoende $N(0,1)$ så har $Y = (X_1, \sqrt{5} X_2)'$ 3p
k-matris Δ_4, samt Y har en täthet. I övriga fall är svaret nej.

4 Den bivariata tätheten kan illustreras med figur:



Den betingade fördelningen för Y givet $X = x$ är den kont. fördelning som ges av tätheten

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \qquad y \in \mathbb{R}.$$ 2p

Marginaltätheten för X ges av

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_1^2 \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}, & \text{om } x \in (0,1] \\ \int_0^1 \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}, & \text{om } x \in (1,2] \end{cases}$$

Alltså är $X \sim \text{Likf}[0,2]$.
Vi får för $x \in (0,1]$

$$f_{Y|X=x}(y) = 1 \qquad \text{för } y \in (1,2]$$

och för $x \in (1,2]$

$$f_{Y|X=x}(y) = 1 \qquad \text{för } y \in (0,1].$$

Detta motsvarar den likformiga fördelningen på intervallen $[1,2]$ resp. $[0,1]$. 3p

$\boxed{5}$ (a) Notera att $\bar{Y} = B\bar{X}$ där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enligt sats gäller $\bar{Y} \sim N(B\mu, B\Lambda B')$, där

$$B\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{\bar{Y}} = B\Lambda B' = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 11 \\ 2 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}.$$

3p

(b) $\bar{Y}$ har en täthet om $\det(\Lambda_{\bar{Y}}) > 0$.

$$\det(\Lambda_{\bar{Y}}) = 16^2 - 4 = 252 > 0.$$

Täthet finns och ges av

$$f_{\bar{Y}}(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\det \Lambda_{\bar{Y}}}} \exp\Big(-\frac{1}{2} \underbrace{(y-\mu)' \Lambda_{\bar{Y}}^{-1} (y-\mu)}_{\frac{1}{504}\left[16y_1^2 + 4y_1(y_2-8) + 16(y_2-8)^2\right]}\Big)$$

där

$$\Lambda_{\bar{Y}}^{-1} = \frac{1}{252} \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}.$$

3p

(c) Den betingade fördelningen för $\bar{Y}_1$ givet $\bar{Y}_2 = 10$ söks. Det är den med täthet som ges av

$$f_{\bar{Y}_1 | \bar{Y}_2 = 10}(y_1) = \frac{f_{\bar{Y}_1, \bar{Y}_2}(y_1, 10)}{f_{\bar{Y}_2}(10)}$$

$$= \text{konstant} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot 252}\left[16y_1^2 + 8y_1\right]\right)$$

$$= \text{konstant} \cdot \exp\left(-\frac{16}{2 \cdot 256}\left(y_1 + \frac{1}{4}\right)^2\right).$$

4p

Detta känner vi igen som tätheten för en $N(-\frac{1}{4}, \frac{256}{16})$-fördelning. (Konstant framför är vad den måste vara.)

$\boxed{6}$ (a) Låt N ange antalet par som skrider till häckning. Enligt uppgift är $N \sim \mathrm{Poi}(10)$. Låt X_k ange antalet ungar (kullstorleken) för par k. Enligt uppgift gäller $X_k \sim \mathrm{geo}(1/5)$, samt $X_1, X_2, \ldots$ kan anses oberoende av varandra och N.

Det totala antalet ungar som kläcks kan uttryckas

$$M = \sum_{k=1}^{N} X_k .$$

2p

På grund av oberoendet får vi från sats att

$$\mathbb{E}[M] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[N] = \frac{1-1/5}{1/5} \cdot 10 = 40.$$

2p

Igen från sats får vi

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(M) &= \mathbb{E}[X_1]^2 \,\mathrm{Var}(N) + \mathbb{E}[N]\,\mathrm{Var}(X_1) \\ &= 4^2 \cdot 10 + 10 \cdot \frac{1-1/5}{(1/5)^2} \\ &= 16 \cdot 10 + 10 \cdot \frac{4}{5} \cdot 25 = 360. \end{aligned}$$

2p

(Formler för betingat väntevärde och varians kan också användas.)

(b) Låt $Y_k = \mathbb{1}\{X_k \leq 2\}$. Då gäller $K = \sum_{k=1}^{N} Y_k$, så att

$$\mathbb{E}[K] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[Y_k] = 10 \cdot \mathbb{P}(Y_k = 1).$$

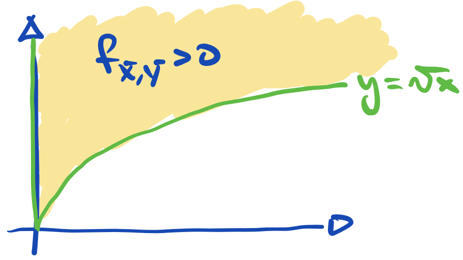
Beräkning ger

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(X_k \leq 2) &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5}\right)^2 \\ &= \frac{1}{5}\left[1 + \frac{4}{5} + \frac{16}{25}\right] \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{61}{25} = \frac{61}{125}. \end{aligned}$$

4p

så $\mathbb{E}[K] = \frac{610}{125}$.

$\boxed{7}$ (a) Marginaltätheten för Y ges av



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$
$$= \int_0^{y^2} \frac{1}{2} e^{-y}\,dx$$
$$= \frac{1}{2} y^2 e^{-y}$$

för $y > 0$. 3p

(b) Den betingade fördelningen för X givet $Y = y$ är den med täthet

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2}e^{-y}}{\frac{1}{2}y^2 e^{-y}} = \frac{1}{y^2}$$

för $x \in (0, y^2)$. Detta är tätheten för den likformiga fördelningen på $(0, y^2)$, vilken har väntevärde $y^2/2$, vilket ger

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \frac{y^2}{2} \quad \text{för } y > 0.$$ 4p

(c) Sätt $h(y) = \mathbb{E}[X \mid Y = y] = y^2/2$. Då är

$$Z = \mathbb{E}[X \mid Y] = h(Y) = \frac{Y^2}{2}.$$

Därmed gäller det att

$$F_Z(z) = \mathbb{P}\left(\frac{Y^2}{2} \le z\right) = \mathbb{P}(Y \le \sqrt{2z}) = F_Y(\sqrt{2z}).$$

Tätheten för Z fås genom derivering:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = f_Y(\sqrt{2z}) \cdot \frac{d}{dz}\sqrt{2z}$$

kedjeregeln $= z \cdot e^{-\sqrt{2z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2z}}$ 3p

$$= \sqrt{\frac{z}{2}}\, e^{-\sqrt{2z}} \quad \text{för } z > 0.$$

(Notera att $y > 0 \Rightarrow z = h(y) > 0$.)
Transformationssatsen kan också användas.

$\boxed{8}$ (a) Chebyshevs olikhet ger, då $\mathbb{E}[Y_n]=\mu n$, att

$$\mathbb{P}(|Y_n-\mu n|>\varepsilon n)\leq\frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{(\varepsilon n)^2}=\frac{\mu}{\varepsilon^2 n}\to 0$$

3p

då $n\to\infty$, för varje $\varepsilon>0$. Detta visar att $\frac{Y_n}{n}\xrightarrow{P}\mu$.

(b) Vi noterar först att

$$\frac{S_n-\mu n}{\sqrt{Y_n}}=\frac{S_n-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\cdot\sigma\frac{1}{\sqrt{Y_n/n}}.$$

2p

Enligt centrala gränsvärdessatsen gäller, då $n\to\infty$,

$$\frac{S_n-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\xrightarrow{d}N(0,1).$$

2p

Enligt del (a) gäller, då $n\to\infty$,

$$\frac{Y_n}{n}\xrightarrow{P}\mu.$$

Då $g(y)=1/\sqrt{y}$ är kontinuerlig för $y\neq 0$ gäller enligt sats att $g(Y_n/n)\xrightarrow{P}g(\mu)$, då $n\to\infty$. Cramér-Slutskys sats ger till slut att, då $n\to\infty$,

$$\frac{S_n-\mu n}{\sqrt{Y_n}}\xrightarrow{d}N(0,\sigma/\sqrt{\mu}).$$

3p