MT5002 – Sannolikhetsteori II – tentamen

Datum Fredag 26 maj, 2023
Examinator Daniel Ahlberg
Hjälpmendel Formelblad som delas ut med tentamen.
Bedömning Tentamen är indelad i en basdel och en betygsgrundande del, vilka består av 20 respektive 40 poäng. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även den betygsgrundande delen, som bestämmer betyget. Inlämningsuppgifter under kursens gång har kunnat generera upp till sex bonuspoäng. Dessa räknas in i den betygsgrundande delen, men ej basdelen. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen (bonuspoäng inräknade):

	A	B	C	D	E
Basdel	14	14	14	14	14
Betygsgrundande del	38	30	20	10	0

Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Basdel

Uppgift 1. Låt X vara multivariat normalfördelad med väntevärdesvektor och kovariansmatris som ges av

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Visa att $Y_1 = X_1 - X_2/\sqrt{2}$ och $Y_2 = X_2/\sqrt{2}$ är oberoende. (5p)

Uppgift 2. Låt X och Y vara oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler med väntevärde 1. Bestäm den momentgenererande funktionen för $X + Y$, samt beräkna $\mathbb{E}[(X+Y)^2]$. (5p)

Uppgift 3. Låt $(X, Y)'$ vara en slumpvektor vars täthet är

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/2 & \text{för } 0 < x \leq 1, 1 < y \leq 2, \\ 1/2 & \text{för } 1 < x \leq 2, 0 < y \leq 1. \end{cases}$$

Bestäm $\mathbb{P}(X \leq 1)$ och $\mathbb{P}(Y \leq 1)$, samt avgör om X och Y är oberoende. (5p)

Uppgift 4. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende och likformigt fördelade stokastiska variabler på intervallet $[0, 1]$. För $n \geq 1$, sätt

$$M_n = \min\{|X_k - 1/2| : k = 1, \ldots, n\}.$$

Visa att $M_n \to 0$ i sannolikhet då $n \to \infty$. (5p)

Betygsgrundande del

Uppgift 5. Antag att $X = (X_1, X_2, X_3)'$ är multivariat normalfördelad med väntevärdesvektor μ och kovariansmatris Λ givna av

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm fördelningen för $Y = (X_1 + X_2, X_3 - X_1)'$. (3p)

(b) Bestäm huruvida X och Y har täthetsfunktioner, och ange i så fall dessa. (3p)

(c) Beräkna det betingade väntevärdet för $X_1 + X_2$ givet $X_3 - X_1 = 0$. (4p)

Uppgift 6. Låt $(X, Y)'$ vara likformigt fördelad på enhetscirkeln, dvs regionen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(a) Bestäm den betingade fördelningen av X givet $Y = y$ för $|y| < 1$. (4p)

(b) Bestäm kovariansen mellan X och Y. (3p)

(c) Avgör huruvida X och Y är oberoende eller ej. (3p)

Uppgift 7. Låt X_1, X_2, X_3 vara oberoende $N(0, 1)$-fördelade stokastiska variabler.

(a) Beräkna den momentgenererande funktionen för X_1^2. (3p)

(b) Visa att $X_1^2 + X_2^2$ är exponentialfördelad. Bestäm dess väntevärde. (4p)

(c) Avgör huruvida slumpvektorn $Y = (X_1^2 + X_2^2, X_3)'$ är kontinuerlig eller inte, och bestäm i så fall dess täthet. (3p)

Uppgift 8. I en urna ligger initialt a röda och b blåa bollar. I var tidssteg dras en boll ur urnan (enligt den likformiga fördelningen), och läggs sedan tillbaka tillsammans med en extra boll av samma färg. Denna process är känd som *Polyas urna*. Låt Y_k ange andelen röda bollar i urnan efter k omgångar. Det är känt att följden $(Y_k)_{k \geq 0}$ konvergerar i fördelning mot en beta(a, b)-fördelning.

(a) För $n \geq 1$, låt X_n vara beta$(n, 3n)$-fördelad. Visa att

$$\mathbb{P}(|X_n - 1/4| > 1/4) \leq 1/n. \text{ (4p)}$$

(b) Betrakta Polyas urna med $a = 100$ och $b = 300$. Visa att för stora värden på k så gäller $\mathbb{P}(Y_k \leq 1/2) \geq 0.98$. (6p)

Ledning: Chebyshevs olikhet säger att $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > a) \leq \frac{1}{a^2}\,\mathrm{Var}(X)$.