Tenta Sanno II 26 maj 2023 lösningar

1

Vi har $Y = BX$ där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Enligt sats är $Y \sim N(B\mu, B\Lambda B')$.

$$B\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B\Lambda B' = B\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= B\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad 3p$$

Vi ser att $Cov(Y_1, Y_2) = 0$. Då Y är multivariat normalfördelad följer det att Y_1 och Y_2 är oberoende enl. sats. 2p

2

Enligt formelblad har X och Y MGF

$$\psi_X(t) = \psi_Y(t) = \frac{1}{1-t} \qquad t < 1.$$

Då X och Y är oberoende gäller enl. sats att

$$\psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t) \cdot \psi_Y(t) = \frac{1}{(1-t)^2}. \qquad 3p$$

Momenten av $X+Y$ fås genom derivering.

$$E[(X+Y)^2] = \psi''_{X+Y}(0).$$

Vi får

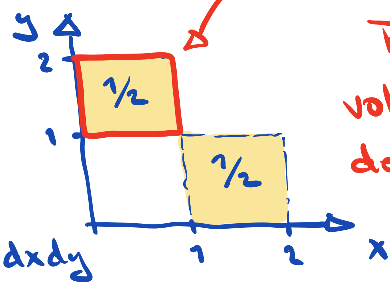
$$\psi'_{X+Y}(t) = \frac{2}{(1-t)^3}$$

$$\psi''_{X+Y}(t) = \frac{6}{(1-t)^4}$$

Alltså $E[(X+Y)^2] = 6.$ 2p

3

Vi visualiserar tätheten.



Alt. Notera att $P(X \le 1)$ är volymen under denna yta. Eller bestäm marginal-tätheten.

Vi beräknar

$$P(X \le 1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{1} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 1/2 \,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 dy \cdot \int_0^1 1/2\, dx$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} = 1/2.$$

3p

På grund av symmetri gäller även $P(Y \le 1) = 1/2$.

Dock gäller

$$P(X \le 1, Y \le 1) = \int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{1} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Alltså är X och Y ej oberoende. 2p

4

$X_1, X_2, \ldots \sim$ likf $[0,1]$.

$$M_n = \min\{|X_k - \tfrac{1}{2}| : k = 1,2,\ldots,n\}.$$

Vi vill visa $\forall \varepsilon > 0$ att då $n \to \infty$

$$P(|M_n| > \varepsilon) \to 0.$$

2p

Vi har för $\varepsilon \in (0, 1/2)$

$$P(|M_n| > \varepsilon) = P(|X_k - 1/2| > \varepsilon \;\; \forall k = 1,2,\ldots,n)$$

oberoende $$= P(|X_1 - 1/2| > \varepsilon)^n$$

$$= \left[1 - P\left(X_1 \in \left(\tfrac{1}{2} - \varepsilon, \tfrac{1}{2} + \varepsilon\right)\right)\right]^n$$

$$= [1 - 2\varepsilon]^n$$

$$\to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$

3p

5 (a) Vi har $X \sim N(\mu, \Lambda)$ och $Y = BX$ där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt sats följer det att $Y \sim N(B\mu, B\Lambda B')$, där

$$B\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad B\Lambda B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ 3p

(b) Täthet existerar om kovariansmatrisen är inverterbar.

$$\det(\Lambda) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

$$\det(B\Lambda B') = 2 - 1 = 1 > 0.$$ 1p

Därmed har Y en täthet, men inte X. Vi har

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger tätheten

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\det(\Lambda_Y)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\mu)' \Lambda^{-1} (y-\mu)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\Bigg(-\frac{1}{2} \underbrace{(y_1-1, y_2+1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1-1 \\ y_2+1 \end{pmatrix}}_{(y_1-1)^2 - 2(y_1-1)(y_2+1) + 2(y_2+1)^2}\Bigg)$$ 2p

(c) Vi vill beräkna det betingade väntevärdet $E[Y_1 \mid Y_2 = 0]$.
Den betingade fördelningen $Y_1 \mid Y_2 = y_2$ har täthet

$$f_{Y_1 \mid Y_2 = y_2}(y_1) = \frac{f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)}{f_{Y_2}(y_2)}$$ 2p

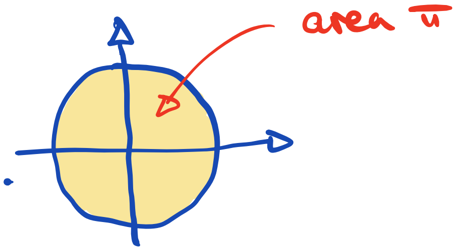
$$= \text{konst.} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left[(y_1-1)^2 - 2(y_1-1)(y_2+1) + 2(y_2+1)^2\right]\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}(y_2+1)^2\right)}$$

$$= \text{konst.} \cdot \exp\Bigg(-\frac{1}{2}\Big[\underbrace{(y_1-1)^2 - 2(y_1-1)(y_2+1) + (y_2+1)^2}_{((y_1-1)-(y_2+1))^2 = (y_1-(y_2+2))^2}\Big]\Bigg)$$

Vi känner igen den betingade tätheten som tätheten för en $N(y_2+2, 1)$-fördelning. Därmed gäller $E[Y_1 \mid Y_2 = 0] = 2$. 2p

$\boxed{6}$ Vi visualiserar tätheten.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} \quad \text{om } x^2+y^2 \leq 1.$$



(a) Marginaltätheten för Y ges av

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$
$$= \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} \qquad \text{för } |y|<1.$$

2p

Den betingade tätheten blir då

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}$$

för $|y|<1$ och $|x|<\sqrt{1-y^2}$. Dvs, givet $Y=y$ är X likformigt fördelad på $(-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2})$.

2p

(b) Vi vill beräkna

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Via betingning får vi

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] \overset{\text{sats}}{=} \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[X|Y]] \overset{(a)}{=} 0,$$
$$\mathbb{E}[XY] \overset{\text{sats}}{=} \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[XY|Y]]$$
$$= \mathbb{E}[Y\,\mathbb{E}[X|Y]] \overset{(a)}{=} 0.$$

Alltså $\operatorname{Cov}(X,Y)=0$.

3p

(c) X och Y är ej oberoende då den betingade fördelningen av X givet $Y=y$ beror på värdet av y.

3p

$\boxed{7}$ (a) Låt X vara $N(0,1)$. Då gäller

$$\varphi_{X^2}(t) = E[e^{tX^2}]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2(1-2t)/2} dx \cdot \frac{\sqrt{1-2t}}{\sqrt{1-2t}}$$

3p

$=1$ om $t<1/2$

ty täthet för $N(0, \frac{1}{\sqrt{1-2t}})$

Alltså $\varphi_{X^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$ för $t<1/2$

(b) Om X_1, X_2 är oberoende $N(0,1)$ gäller enl. sats att

$$\varphi_{X_1^2+X_2^2}(t) \overset{\text{sats}}{=} \varphi_{X_1^2}(t)\,\varphi_{X_2^2}(t) \overset{(a)}{=} \frac{1}{1-2t}, \quad t<1/2.$$ 2p

Detta känner vi igen som MGF för exponentialfördelningen med väntevärde 2. Eftersom en MGF bestämmer fördelningen 2p är $X_1^2+X_2^2 \sim \exp$ med väntevärde 2.

(c) Då X_1, X_2, X_3 är $N(0,1)$ gäller enl. (b) att

$$Y_1 = X_1^2 + X_2^2 \sim \exp(2)$$
$$Y_2 = X_3 \sim N(0,1)$$

samt att de två är oberoende. Därmed gäller 1p

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2)$$
$$= \frac{1}{2} e^{-y_1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y_2^2/2}, \qquad y_1 \geq 0,\ y_2 \in \mathbb{R}.$$

Y är därmed kontinuerlig med täthet ovan. 2p

$\boxed{8}$ (a) Låt $X_n \sim \text{beta}(n, 3n)$. Enligt formelblad gäller

$$\mathbb{E}[X_n] = \frac{n}{n+3n} = 1/4$$

$$\text{Var}(X_n) = \frac{n \cdot 3n}{(n+3n)^2(n+3n+1)} = \frac{3n^2}{16n^2(4n+1)} \leq \frac{1}{16n}$$

2p

Chebyshevs olikhet ger därmed

$$\mathbb{P}\left(|X_n - 1/4| > \tfrac{1}{4}\right) \leq \frac{\text{Var}(X_n)}{(1/4)^2} \leq \frac{16}{16n} = \frac{1}{n}.$$

2p

(b) Låt $a = 100$, $b = 300$. Enligt uppgift vet vi att andelen röda bollar Y_k konvergerar i fördelning:

$$Y_k \xrightarrow{d} \text{beta}(100, 300) \quad \text{då } k \to \infty.$$

Eftersom $X_{100} \sim \text{beta}(100, 300)$ gäller därmed

$$F_{Y_k}(x) \longrightarrow F_{X_{100}}(x) \quad \text{då } k \to \infty$$

2p

för alla $x \in (0,1)$, där $F_{X_{100}}$ är kontinuerlig.

Speciellt gäller

$$\mathbb{P}(Y_k \leq \tfrac{1}{2}) = F_{Y_k}(1/2) \geq F_{X_{100}}(1/2) - 1/100$$

för alla tillräckligt stora värden på k.

2p

Vi noterar härnäst att

$$\begin{aligned}
F_{X_{100}}(1/2) &= 1 - \mathbb{P}(X_{100} > 1/2) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_{100} - 1/4 > 1/4) \\
&\geq 1 - \mathbb{P}(|X_{100} - 1/4| > 1/4) \\
&\geq 1 - \frac{1}{100}.
\end{aligned}$$

Vi får därmed för stora k att

$$\mathbb{P}(Y_k \leq \tfrac{1}{2}) \geq 1 - \frac{1}{100} - \frac{1}{100} = .98.$$

2p