STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

LÖSNINGAR
13 mars 2023

Lösningar

13 mars 2023

Uppgift 1

Vi har att $X \sim$Exp(1/2), så att $\mathbb{E}[X] = 2$ och $\text{Var}(X) = 2^2$, och $Y|X = x \sim$ Exp($1/3x$). **a)** Väntevärdet blir

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[3X] = 3\mathbb{E}[X] = 6.$$

b) Variansen ges av

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}(\mathbb{E}[Y|X]) = \mathbb{E}[(3X)^2] + \text{Var}(3X) = 9(\mathbb{E}[X^2] + \text{Var}(X)).$$

Enligt räkneregeln gäller att $\mathbb{E}[X^2] = \text{Var}(X) + \mathbb{E}[X]^2 = 4 + 4 = 8$, och alltså $\text{Var}(Y) = 9(8 + 4) = 108$.

Uppgift 2

a) Kedjans klasser är $\{1\}$ (transient), $\{3, 6\}$ (transient), $\{2, 4\}$ (rekurrent) och $\{5, 7, 8\}$ (rekurrent).

b) Klasserna $\{2, 4\}$ och $\{5, 7, 8\}$ är aperiodiska. Klassen $\{3, 6\}$ är periodisk med period 2. För klassen $\{1\}$ är det inte meningsfullt att tala om periodicitet eller aperiodicitet.

c) Om $X_0 = 1$ så kommer processen förr eller senare hamna i den rekurrenta klassen $\{5, 7, 8\}$ När en Markovkedja rör sig i en rekurrent klass med ett ändligt antal tillstånd så kommer med sannolikhet 1 varje tillstånd att besökas att oändligt antal gånger. Den sökta sannolikheten är alltså 1.

Uppgift 3

a) Tiden T_n tills den första norrgående bilen passerar är Exp(0.2) =-fördelad. Den söka sannolikheten är alltså $\mathbb{P}(T_n > 6) = e^{-0.2 \cdot 6} = e^{-1.2} \approx 0.30$.

b) Den sammanlagda trafiken utgör en Poissonprocess med intensitet $0.2 + 0.3 = 0.5$, så tiden T tills den första bilen passerar är Exp(0.5)-fördelad. Den sökta sannolikheten är alltså $\mathbb{P}(T > 2) = e^{-0.5 \cdot 2} = e^{-1} \approx 0.37$.

c) Antalet bilar $N(2)$ som passerar under de första två minuterna är $\text{Po}(0.5 \cdot 2) = \text{Po}(1)$-fördelat och vi får att

$$\mathbb{P}(N(2) \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(N(2) = 0) - \mathbb{P}(N(2) = 1) = 1 - 2e^{-1} \approx 0.26.$$

d) Tiden T_n tills den första norrgående bilen passerar är Exp(0.2)-fördelad och tiden T_s tills den första södergående bilen passerar är Exp(0.3)-fördelad, och dessa tider är oberoende av varandra. Den söka sannolikheten är alltså $\mathbb{P}(T_s < T_n) = 0.3/(0.2 + 0.3) = 0.6$.

Uppgift 4

a) Om man startar i tillstånd 1 så kan man i framtiden bara befinna sig i tillstånd 1 eller 4. Övergånsmatrisen för motsvarande Markovkedja är

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Detta är övergångsmatrisen för en ändlig, aperiodisk och irreducibel Markovkedja och därmed finns en gränsfördelning $\pi = (\pi_1, \pi_4)$ som bestäms av sambandet $\pi\widetilde{\mathbf{P}} = \pi$, vilket har lösning $\pi = (1/3, 2/3)$. Det sökta gränsvärdet är $\pi_1 = 1/3$.

b) Övergångsmatrisen för Markovkedjan med tillstånden 2,3,5 ges av

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Vi är emellertid bara intresserade av vad som händer fram till det första besöket i tillstånd 5. Därför gör vi tillstånd 5 absorberande och får då följande övergångsmatris:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Övergångarna mellan de transienta tillstånden 2 och 3 beskrivs av matrisen $\mathbf{P}_T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$ och vi söker elementet S_{12} i matrisen $S = (\mathbf{1} - \mathbf{P}_T)^{-1}$. Vi får

$$(\mathbf{1} - \mathbf{P}_T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Svaret är alltså 3/2.

Uppgift 5

a) Processen $X(t)$ utgör en födelse-dödsprocess med födelseintensitet $\lambda_n = 10$ för alla n. När n personer lyssnar på kanalen så är tiden tills någon tröttnar minimum a n oberoende exponentialvariabler med väntvärde 300 sekunder, dvs parameter $\mu = 1/300$. Dödsintenstiteten är alltså $\mu_n = n/300$. Frågan om en stationär fördelning existerar eller ej avgörs av om serien $\sum_n r_n$ är konvergent eller divergent, där $r_n = (\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1})/(\mu_1 \cdots \mu_n)$. Med de aktuella uttrycken för λ_n och μ_n får vi $r_n = \lambda^n/(n!\mu^n) = (\lambda/\mu)^n/n!$ för alla $n \geq 1$. Eftersom $\sum_n (\lambda/\mu)^n/n! = e^{\lambda/\mu} < \infty$ så följer att serien är konvergent och den stationära fördelningen ges av

$$\lim_t \mathbb{P}(X(t) = n) = \frac{r_n}{\sum_{n=0}^{\infty} r_n} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} e^{-\lambda/\mu},$$

dvs en Poissonfördelning med väntevärde $\lambda/\mu = 3000$.

b) Man kan ifrågasätta om det är rimligt att lyssnare anländer enligt en tidshomogen process (rimligen lyssnar fler på dagen än på natten). Eventuellt är det också tveksamt med en minneslös fördelning för lyssningstiden (har man lyssnat länge ökar kanske sannolikheten att man tröttnar).

Uppgift 6

a) Processen X_n som anger antalet bakterier efter n tidseneheter utgör en förgreningsprocess där avkomman Y är $\text{Bin}(3, p)$-fördelad. Låt π_0 beteckna utdöendelsannolikheten när $X_0 = 1$. Om $X_0 = k$ är då utdöendesannolikheten π_0^k. En förgreningsprocess dör ut med sannolikhet 1 omm väntevärdet för avkommefördelningen är mindre än eller lika med 1. Vi har $\mathbb{E}[Y] = 3p$, vilket medför att $\pi_0 = 1$ omm $p \leq 1/3$. För ett sådant p gäller förstås också att $\pi_0^k = 1$ för alla k. Svaret blir alltså att processen dör ut med sannolikhet 1 för $p \leq 1/3$ och godtyckligt värde på k.

b) Låt $G(x) = \sum_{j=0}^{3} x^j \mathbb{P}(Y = j)$. För $p = 1/2$ får vi $G(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3$. Utdöendesannolikheten π_0 då $X_0 = 1$ ges av den minsta positiva roten till ekvationen $x = G(x)$. För oss blir ekvationen

$$x = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3.$$

Utnyttjar vi att $x = 1$ alltid är en rot, kan den skrivas som

$$x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = (x - 1)(x^2 + 4x - 1) = 0.$$

Den minsta positiva roten till ekvationen $x^2 + 4x - 1 = 0$ är $\pi_0 = -2 + \sqrt{5}$. Utdöendesannolikheten då $X_0 = k$ är π_0^k och $(-2 + \sqrt{5})^k \leq 0.1$ ger $k > \log(0.1/\log(-2 + \sqrt{5}) = 1.59$. Alltså krävs att $k = 2$.