MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLM UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: S. Rodríguez-López

Tentamensskrivning i
Analys, del A
MM5010 7.5hp
20240229

Inga hjälpmedel tillåtna. Samtliga svar måste motiveras. Minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen. Talen är inte ordnade efter svårighetsgrad. Skriv dina lösningar på separat papper.

Problemdel

1. Avgör om följande serie och generaliserade integral är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:

   (a) **[2 p]** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{\ln(k+1)}}$, (b) **[1 pt]** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}+x^5}$.

   Lösningsförslag.

   (a) Notera att för alla $k \geq 1$

   $$\ln(k+1) \leq k,$$

   och att serien $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergerar (det kan visas med hjälp av Cauchykriterium). Jämförelsekriterium I ger oss att den positiva serien

   $$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{\ln(k+1)}}$$

   divergerar. Så serien är inte absolutkonvergent.
   Det är en alternerande serien där talföljden $\frac{1}{\sqrt{\ln(k+1)}}$ är avtagande. Leibnizkriterium ger oss att serien är betingat konvergent.

   (b) Funktionen $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}+x^5}$ är positiva och obegränsad i intervallet $(0,1)$ ty

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

   Notera att

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2+x^{9/2}} = \frac{1}{2}.$$

   Då integralen konvergerar, eftersom, Jämförelsekriterium II ger oss att integralen konvergerar om, och endast om det gör den generaliserad integralen

   $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0^+} 2\sqrt{x}|_s^1.$$

2. **[3 pt]** Lös differentialekvationen

   $$2y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad f(x,0) = \ln|x|,$$

   t.ex. genom att införa de nya variablerna $u = x - y^2$ och $v = y$.

Lösningsförslag. Kedjeregeln ger

$$f'_x = f'_u \qquad f'_y = -2yf'_u + f'_v,$$

vilket överför ekvationen i

$$2yf'_u - 2yf'_u + f'_v = 2y \Leftrightarrow f'_v = 2v. \Leftrightarrow f(u,v) = v^2 + g(u) = y^2 + g(x-y^2).$$

Om vi sätter in $y = 0$ och använder villkoret $f(x,0) = \ln|x|$ får vi $g(x) = \ln|x|$. Lösningen är därför

$$f(x,y) = y^2 + \ln\left|x - y^2\right|.$$

3. För varje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, låt $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara funktionen definierad av

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(\sin(x^2|y|))^\alpha}{x^2+y^2}, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$?

   (b) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är partiellderiverbar i origo?

   (c) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är differentierbar i origo?

Lösningsförslag.

(a) Notera att funktioner är odefinierad i några punkter på planet om $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, så kan inte vara kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$ i dessa fall.

Om $\alpha \in \mathbb{N}$, är $\mathbb{R}^2$ funktionsdefinitionsmängden och funktionen är kontinuerlig i alla punkter förutom $(0,0)$ eftersom det är en produkt av funktioner som kan skrivas som en sammansättning av kontinuerliga funktioner.

Eftersom $(0,0)$ är en hopningspunkt, är f_α kontinuerlig i origo om, och bara om

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = f_\alpha(0,0) = 0.$$

Omskrivning av uttrycket i polära koordinater, och användingen av standardgränsvärden visas att det gäller om $\alpha \geq 1$ och $\alpha \in \mathbb{N}$.

(b) Notera att, för alla $\alpha > 0$, f_α är väl definierad i en området av origo. Dessutom

$$\frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(0,0) := \lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x,0) - f_\alpha(0,0)}{x} = 0,$$

och likadan $\frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(0,0) = 0$. Så är f_α partiellderiverbar i origo för alla $\alpha > 0$.

(c) Om f_α är differentierbar i origo, gäller då att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_\alpha(x,y)}{(x^2+y^2)^{1/2}} = 0.$$

Omskrivning av uttrycket i polära koordinater, och användingen av standardgränsvärden visas att det gäller om, och bara om, $\alpha > 1$.

4. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3xy + y^3 - 3y^2 + 4.$$

(a) **[2 p]** Hitta alla stationära punkter för denna funktion, och bestäm, för varje av dessa, den associerade kvadratiska formen.

(b) **[1 p]** Bestäm om de stationära punkterna är lokala maxima, minima eller sadelpunkter.

Lösningsförslag.

(a) Gadienten blir

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6x + 3y \\ 3x + 3y^2 - 6y \end{pmatrix}.$$

Vi skulle lösa

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y = 0 \\ x + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x(2-x) \\ x + x^2(2-x)^2 - 2x(2-x) = 0 \end{cases}.$$

Så $x = 0$ (och då $y = 0$) eller

$$1 + x(4 - 4x + x^2) - 4 + 2x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 6x - 3 = 0.$$

Vi gissar att 1 är en lösning. Då polynomdivison ger oss att

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 3 = (x-1)(x^2 - 3x + 3).$$

Så ser vi att $x = 1$ är den endast reella lösningar. Därför finns två stationära punkter

$$p_1 = (1,1) \qquad p_2 = (0,0).$$

Notera att

$$f(p_1) = 3, \qquad f(p_2) = 4.$$

Hessianer blir då

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 3 \\ 3 & 6y-6 \end{pmatrix},$$

så den quadratiska formerna blir

$$Q_{p_1}(h,k) = 6kh \qquad Q_{p_2}(h,k) = -6h^2 + 6hk - 6k^2.$$

(b) Kvadratkomplettering ger oss att

$$Q_{p_2}(h,k) = -6\left((h - \frac{k}{2})^2 + \frac{3}{4}k^2\right).$$

Så drar vi som slutsatsen att p_1 är en sadelpunkt och p_2 ett lokalt maximipunkt.

5. Låt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = (x+y)e^{-2x-4y^2}, \qquad (x,y) \in D.$$

(a) **[1 p]** Bevisa att $\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ (x,y)\in D}} f(x,y) = 0$.

(b) **[2 p]** Undersök om funktionen f har ett största och ett minsta värde i mängden $\boldsymbol{D}$, och bestäm dessa i så fall.

Lösningsförslag.

(a) Vi behöver undersöka vad som händer då $x^2+y^2\to\infty$ och $x>0$. Först skriver vi om funktionen f som

$$f(x,y)=xe^{-x}e^{-4y^2}e^{-x}+ye^{-y^2}e^{-3y^2}e^{-2x}.$$

Eftersom $xe^{-x}\to 0$ då $x\to+\infty$, och xe^{-x} är kontinuerlig, är funktionerna xe^{-x} och e^{-x} begränsad för $x\geq 0$. Dessutom, $\lim_{y\to\pm\infty} e^{-4y^2}=0$. Så följer det att

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} xe^{-2x}e^{-4y^2}=0.$$

Eftersom $ye^{-y^2}\to 0$ då $y\to\pm\infty$, är funktionen ye^{-y^2} begränsad för alla $y\in\mathbb{R}$. Dessutom är e^{-2x} begränsad för $x\geq 0$. Då får vi att

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} ye^{-y^2}e^{-3y^2}e^{-2x}=0.$$

Det följer att $f(x,y)\to 0$ då $x^2+y^2\to\infty$ för $(x,y)\in D=\{(x,y):x>0\}$.

(b) Definitionen av gränsvärdet ger oss att, givet $\varepsilon>0$, finns det $N>0$, sådant att, för $|(x,y)|>N$ och $x>0$ gäller att $|f(x,y)|\leq\varepsilon$. Vi väljer $\varepsilon=\frac{1}{4\sqrt{2e}}$ (Varför? ;-)).
Då kan vi reducera vår studie till den kompakta området

$$D_N=\left\{(x,y):x\geq 0,x^2+y^2\leq N\right\}.$$

Då vet vet att funtionen har en maximum och minimum i den kompakta området, ty f är kontinuerlig.
Gradienten blir

$$\nabla f(x,y)^T=e^{-4y^2-2x}\begin{pmatrix} 1-2(x+y) & 1-8y(x+y) \end{pmatrix}$$

Vi får en stationär punkt $(1/4,1/4)$ (som är en inre punkt till området).

- $f(1/4,1/4)=\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$.

Randen till området utgörs av linjen $x=0$, och $x^2+y^2=N$, .
Notera att vi har väljer N stor sådan att för $x^2+y^2=N$ i området gäller att $|f(x,y)|\leq\varepsilon$.
Låt $g(y)=f(0,y)=ye^{-y^2}$. Derivatan $g'(y)=(1-8y^2)e^{-4y^2}=0$ då $y=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Då har vi

- $f\left(0,\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\pm\frac{1}{2\sqrt{2e}}$.

Det följer att f har ett största och ett minsta värde och att dessa finns bland talen $\frac{1}{2}e^{-3/4}$ och $\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-2/4}$.
Notera att

$$\frac{1}{2}e^{-3/4}\geq\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-2/4}\Leftrightarrow\sqrt{2}\geq e^{1/4}\Leftrightarrow 4\geq e.$$

Då gäller att

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y)=f(0,-\frac{1}{2\sqrt{2e}})\qquad \max_{(x,y)\in D} f(x,y)=f(1/4,1/4).$$

Teoridel

6. **[3 p]** Formulera och bevisa Cauchys rotkriterium och d'Alemberts kvotkriterium för serier.

7. **[3 p]** Härled formlerna för derivatorna av $\sin x$, $\arcsin x$, e^x och $\ln x$. Formeln $\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ får användas utan bevis.