MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLM UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: S. Rodríguez-López

Tentamensskrivning i
Analys, del A
MM5010 7.5hp
20240229

`Inga hjälpmedel tillåtna. Samtliga svar måste motiveras. Minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen. Talen är inte ordnade efter svårighetsgrad. Skriv dina lösningar på separat papper.`

Problemdel

1. Avgör om följande serie och generaliserade integral är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:

   (a) **[2 p]** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{\ln(k+1)}}$, (b) **[1 pt]** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}+x^5}$.

2. **[3 pt]** Lös differentialekvationen
$$2y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad f(x,0) = \ln|x|,$$
t.ex. genom att införa de nya variablerna $u = x - y^2$ och $v = y$.

3. För varje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, låt $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara funktionen definierad av
$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(\sin(x^2|y|))^\alpha}{x^2+y^2}, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$?

   (b) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är partiellderiverbar i origo?

   (c) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är differentierbar i origo?

4. Betrakta funktionen
$$f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3xy + y^3 - 3y^2 + 4.$$

   (a) **[2 p]** Hitta alla stationära punkter för denna funktion, och bestäm, för varje av dessa, den associerade kvadratiska formen.

   (b) **[1 p]** Bestäm om de stationära punkterna är lokala maxima, minima eller sadelpunkter.

5. Låt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$. Betrakta funktionen
$$f(x,y) = (x+y)e^{-2x-4y^2}, \qquad (x,y) \in D.$$

   (a) **[1 p]** Bevisa att $\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ (x,y)\in D}} f(x,y) = 0$.

   (b) **[2 p]** Undersök om funktionen f har ett största och ett minsta värde i mängden D, och bestäm dessa i så fall.

Teoridel

6. **[3 p]** Formulera och bevisa Cauchys rotkriterium och d'Alemberts kvotkriterium för serier.

7. **[3 p]** Härled formlerna för derivatorna av $\sin x$, $\arcsin x$, e^x och $\ln x$. Formeln $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ får användas utan bevis.