MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
12 mars 2024

Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 skrivningspoäng ger betyg åtminstone E.

Påminnelse. Kom ihåg att om $\mathbb{F}$ är en kropp så skriver vi

- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i $\mathbb{F}$ och
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) Låt $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara vektorer i ett vektorrum V över en kropp $\mathbb{F}$. Ange definitionen av att $v_1, v_2, \ldots, v_n$ är *linjärt oberoende*. (1p)

   (b) Visa att $B = (1 - x,\ x - x^2,\ x^2 - x^3,\ x^3)$ är en (ordnad) bas för $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$. (2p)

   (c) Låt $E = (1,\ x,\ x^2,\ x^3)$ vara (ordnade) standardbasen för $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$. Bestäm basbytesmatrisen/koordinatbytesmatrisen från E till B, och använd denna för att beräkna koordinatvektorn $[1 + 2x + 3x^2 + 4x^3]_B$. (2p)

2. (a) Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett $\mathbb{F}$-vektorrum V. Ange definitionerna av begreppen *egenvärde* och *egenrum* för T. (1p)

   (b) Låt $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ vara den linjära operatorn som ges av (3p)

   $$T(p) = x \cdot p'(x) + p(0) + p''(0).$$

   Beräkna alla egenvärden för T och baser för de tillhörande egenrummen, samt avgör om T är diagonaliserbar.

   (c) Med samma T, beräkna dimensionerna av nollrummet $N(T)$ och bildrummet $R(T)$. (1p)

3. Betrakta matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Bestäm både $\det(A^n)$ och A^n för positiva heltal n. (5p)

Var god vänd!

4. (a) Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett inre produktrum V. Ange definitionerna av att T är *normal* respektive *självadjungerad*. (1p)

   (b) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$. För vilka tal $\alpha \in \mathbb{C}$, respektive $\alpha \in \mathbb{R}$, finns det en ON-bas för $\mathbb{C}^2$, respektive $\mathbb{R}^2$, bestående av egenvektorer för A? (Kom ihåg att motivera noggrant.) (4p)

5. (a) Låt $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Ange definitionen av att A är en *ortogonal* matris. (1p)

   (b) Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

6. (a) Låt V vara ett vektorrum över $\mathbb{C}$. Ange definitionen av att en funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ (d.v.s. en funktion av två variabler så att $\langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ för alla $v, w \in V$) är en *inre produkt*. (2p)

   (b) Ta nu $V = \mathbb{C}$. Visa att $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ är en inre produkt om och endast om det finns ett reellt tal $k > 0$ sådant att (3p)

$$\langle x, y \rangle = x\,\overline{y}\,k.$$

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en kopia av tentan beställas från studentexpeditionen.