MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
12 mars 2024

1. (a) Vektorerna $v_1, \dots, v_n$ kallas linjärt oberoende om de enda skalärerna $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ som uppfyller $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0_V$ är $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

   (b) Vi behöver visa att vektorerna är linjärt oberoende och spänner upp $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$.

   $\boxed{\text{Linjärt oberoende:}}$ Per definition av linjärt oberoende undersöker vi ekvationen

$$a_1(1-x)+a_2(x-x^2)+a_3(x^2-x^3)+a_4x^3 = 0 \iff a_1+(a_2-a_1)x+(a_3-a_2)x^2+(a_4-a_3)x^3 = 0,$$

   vilket håller omm $a_1 = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = 0$, vars enda lösning är $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Alltså är vektorerna linjärt oberoende.

   $\boxed{\text{Spänner upp:}}$ Eftersom vi har fyra linjärt oberoende vektorer i ett fyra-dimensionellt rum, så vet vi enligt utlärd sats att vektorerna spänner upp $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$. Vi kan också resonera direkt: vi kan skriva vilket polynom $p \in \mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ som helst som en linjärkombination av vektorerna:

$$p = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 = a_0(1-x)+(a_0+a_1)(x-x^2)+(a_0+a_1+a_2)(x^2-x^3)+(a_0+a_1+a_2+a_3)x^3.$$

   (c) I enlighet med sambandet i (b) ser vi att basvektorerna i E kan uttryckas som kombinationer av de i B via

$$\begin{aligned} 1 &= (1-x) + (x-x^2) + (x^2-x^3) + x^3 \\ x &= (x-x^2) + (x^2-x^3) + x^3 \\ x^2 &= (x^2-x^3) + x^3 \\ x^3 &= x^3, \end{aligned}$$

   och därmed ges basbytesmatrisen från E till B av

$$[\mathrm{id}]^{B}_{\uparrow\, E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Vi har alltså att

$$[1+2x+3x^2+4x^3]_B = [\mathrm{id}]^{B}_{\uparrow\, E}[1+2x+3x^2+4x^3]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

   Svar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

2. (a) En skalär $\lambda \in F$ kallas ett egenvärde för T om det finns en nollskild vektor $v \in V$ sådan att $T(v) = \lambda v$. Egenrummet motsvarande egenvärdet λ är mängden $E_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$.

(b) För att hitta egenvärdena för T börjar vi med att beräkna matrisen för T relativt standardbasen $E = (1,\ x,\ x^2)$:

$$T(1) = 1, \qquad T(x) = x, \qquad T(x^2) = 2x^2 + 2,$$

och därmed är

$$[T]^{E}_{\underset{E}{\uparrow}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom matrisen är övertriangulär kan vi läsa av egenvärdena: 1 och 2, med algebraisk multiplicitet 2 resp. 1. Eftersom $T(1) = 1$ och $T(x) = x$ ser vi att egenrummet för egenvärdet 1 är 2-dimensionellt:

$$E_1 = \operatorname{span}\{1,\ x\}, \quad \text{med bas } \{1,\ x\}.$$

För egenrummet E_2: vi subtraherar 2 från diagonalen av matrisen ovan och hittar motsvarande nollrum:

$$[T]^{E}_{\underset{E}{\uparrow}} - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nollrummet till denna matris ges av ekvationerna $-a_0 + a_2 = 0$, $-a_1 = 0$, dvs vektorer i spannet av $(2, 0, 1)$. I basen E motsvarar detta polynom som är multiplar av $2 + x^2$. Alltså är

$$E_2 = \operatorname{span}\{x^2 + 2\}, \quad \text{med bas } \{x^2 + 2\}.$$

Efterom det existerar en bas för $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ bestående av egenvektorer för T så är T diagonaliserbar.

Svar: Egenvärden 1 och 2, med baser för motsvarande egenrum $\{1,\ x\}$ resp. $\{x^2 + 2\}$. Ja, T är diagonaliserbar.

(c) Eftersom 0 inte är ett egenvärde för T så är $N(T) = \{0_V\}$, så $\dim N(T) = 0$. Enligt dimensionsatsen gäller $\dim N(T) + \dim R(T) = \dim \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$, så $\dim R(T) = 3$.

Svar: $\dim N(T) = 0$ och $\dim R(T) = 3$.

3. Vi har att $\det(A) = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 6$, och enligt produktsatsen är därför $\det(A^n) = (\det A)^n = 6^n$.

För att hitta A^n diagonaliserar vi A. Först hittar vi dess egenvärden via det karaktäristiska polynomet

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} 3-t & 3 \\ 2 & 4-t \end{vmatrix} = (3-t)(4-t) - 6 = (t-6)(t-1).$$

Därmed är A:s egenvärden 1 och 6. Vi beräknar motsvarande egenvektorer på sedvanligt sätt och hittar att

$$E_6 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad E_1 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vi definierar därför basen
$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right),$$
och har i denna bas matrisrepresentationen
$$[L_A]_{\substack{\uparrow \\ B}}^{B} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
och därmed
$$[L_{A^n}]_{\substack{\uparrow \\ B}}^{B} = \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Vi beräknar nu A^n via basbyte med standardbasen $E = (e_1, e_2)$:
$$\begin{aligned} A^n = [L_{A^n}]_{\substack{\uparrow \\ E}}^{E} &= [\mathrm{id}]_{\substack{\uparrow \\ B}}^{E} \, [L_{A^n}]_{\substack{\uparrow \\ B}}^{B} \, [\mathrm{id}]_{\substack{\uparrow \\ E}}^{B} \\ &= [\mathrm{id}]_{\substack{\uparrow \\ B}}^{E} \, [L_{A^n}]_{\substack{\uparrow \\ B}}^{B} \left([\mathrm{id}]_{\substack{\uparrow \\ B}}^{E} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6^n & 3 \\ 6^n & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \cdot 6^n + 3 & 3 \cdot 6^n - 3 \\ 2 \cdot 6^n - 2 & 3 \cdot 6^n + 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Svar: $\det(A^n) = 6^n$ och $A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \cdot 6^n + 3 & 3 \cdot 6^n - 3 \\ 2 \cdot 6^n - 2 & 3 \cdot 6^n + 2 \end{pmatrix}$.

4. (a) Vi betecknar T:s adjungerade avbildning T^*. Operatorn T kallas normal om $T^* \circ T = T \circ T^*$, och självadjungerad om $T^* = T$.

(b) Komplexa fallet: enligt den komplexa spektralsatsen är en komplex matris A diagonaliserbar relativt en ON-bas för $\mathbb{C}^2$ omm den är normal, d.v.s. omm $A^*A = AA^*$. För den angivna matrisen har vi
$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & \overline{\alpha} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + |\alpha|^2 & 2 + \overline{\alpha} \\ 2 + \alpha & 1 + 4 \end{pmatrix}$$
och
$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{\alpha} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4 & 2 + \overline{\alpha} \\ 2 + \alpha & 1 + |\alpha|^2 \end{pmatrix}.$$
Dessa matriser är lika omm $|\alpha| = 2$.

Reella fallet: enligt den reella spektralsatsen är en reell matris A diagonaliserbar relativt en ON-bas för $\mathbb{R}^2$ omm den är symmetrisk, d.v.s. omm $A^T = A$. För den angivna matrisen gäller detta omm $\alpha = 2$.

Svar: Över $\mathbb{C}$: omm $|\alpha| = 2$. Över $\mathbb{R}$: omm $\alpha = 2$.

5. (a) Matrisen A kallas ortogonal om $A\,A^* = A^*A = I$.

(b) Vi söker, per definition, en faktorisering $A = U\,\Sigma\,V^*$ där U och V är ortogonala matriser och

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

där $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ är A:s singulärvärden.

Vi vet att de nollskilda singulärvärdena för A precis motsvarar kvadratrötterna ur de nollskilda egenvärdena till A^*A, så vi beräknar denna matris.

Vi har att

$$A^*A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 25 \\ 25 & 25 \end{pmatrix}.$$

För att hitta egenvärdena beräknar vi det karaktäristiska polynomet

$$\det(A^*A - t \cdot I) = (25 - t)^2 - 25^5 = t(t - 50).$$

Alltså är egenvärdena för A^*A talen 50 och 0, och därmed är singulärvärdena för A talen $\sigma_1 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ och $\sigma_2 = 0$. Alltså ges matrisen Σ av

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För att hitta matrisen V beräknar vi egenvektorerna för A^*A motsvarande egenvärdena på sedvanligt sätt, och får

$$E_{50} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E_0 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi väljer normerade vektorer v_1, v_2 ur respektive egenrum och sätter

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad v_2 \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nu låter vi V vara den ortogonala matrisen med dessa vektorer som kolonner:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Det sista steget är att hitta en ortogonal 3×3-matris U som uppfyller villkoren, vilket vi gör genom att bestämma dess (ortogonala) kolonner u_1, u_2, u_3. För detta använder vi att $Av_1 = \sigma_1 u_1$, dvs att $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} Av_1$:

$$u_1 = \tfrac{1}{5\sqrt{2}} Av_1 = \frac{1}{2 \cdot 5}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom resten av singulärvärdena är 0 är via fria att välja kolonnerna u_2, u_3 godtyckligt så att U är en ortogonal matris. Vi tar

$$u_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

som lätt ses är normerade och ortogonala mot varandra och u_1. Därmed har vi:

Svar: En singulärvärdesuppdelning ges av $A = U\,\Sigma\,V^*$, där

$$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Funktionen kallas en inre produkt om den uppfyller följande krav:
   i. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ för alla $x, y, z \in V$,
   ii. $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$ för alla $x, y \in V$ och $a \in \mathbb{C}$,
   iii. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ för alla $x, y \in V$,
   iv. $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ och $\langle x, x\rangle \geq 0$ för alla $x \in V$, med $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0_V$.

   (b) Vi visar implikationer i båda riktningarna för att visa ekvivalensen.
   $\boxed{\Longleftarrow}$: Vi visar att om k är ett positivt tal och $\langle x, y\rangle = x\,\overline{y}\,k$ för alla $x, y \in \mathbb{C}$, då gäller ovan fyra krav för $x, y, z, a \in \mathbb{C}$:
   i. $\langle x+y, z\rangle = (x+y)\overline{z}k = x\overline{z}k + y\overline{z}k = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
   ii. $\langle ax, y\rangle = (ax)\overline{y}k = a(x\overline{y}k) = a\langle x, y\rangle$,
   iii. $\langle y, x\rangle = y\overline{x}k = \overline{\overline{y}xk} = \overline{\langle x, y\rangle}$,
   iv. $\langle x, x\rangle = |x|^2k \geq 0$ och $\langle x, x\rangle = 0 \iff |x|^2k = 0 \iff |x| = 0 \iff x = 0$.

   $\boxed{\Longrightarrow}$: Vi visar att om $\langle\cdot,\cdot\rangle$ är en inre produkt på $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, då finns det ett positivt tal k sådant att $\langle x, y\rangle = x\,\overline{y}\,k$ för alla $x, y \in \mathbb{C}$. Låt $k = \langle 1, 1\rangle$. Då är $k > 0$ enligt del (iv) av definitionen av inre produkt. Vidare har vi, för $x, y \in \mathbb{C}$,

$$\langle x, y\rangle = x\langle 1, y\rangle = x\overline{\langle y, 1\rangle} = x\overline{y}\overline{\langle 1, 1\rangle} = x\overline{y}k,$$

   enligt del (ii), del (iii) respektive del (ii) av definitionen ovan, vilket var det vi ville visa.