Matematiska institutionen, Stockholms universitet

Tentamen i MT7027, Riskmodeller och reservsättning inom sakförsäkring, 15 mars 2024, 8:00–13:00.

Examinator: Filip Lindskog, lindskog@math.su.se

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare som tillhandahålls av institutionen.

Återlämning: meddelas via kursforum.

Argument och beräkningar ska vara tydliga och lätta att följa.

Eventuellt kan approximationerna $1-\Phi(1)\approx 0.159$, $1-\Phi(2)\approx 0.023$, $\Phi^{-1}(0.95)\approx 1.64$, $\Phi^{-1}(0.975)\approx 1.96$, $\Phi^{-1}(0.995)\approx 2.58$ vara användbara, Φ är fördelningsfunktionen för standardnormalfördelningen.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Uppgift 1

För en försäkringsprodukt modelleras antalet skador N under ett år med en Poissonfördelning med väntevärde λ. Skadebeloppen $X_1, X_2, \dots$ antas vara oberoende och oberoende av antalet skador och antas alla vara exponentialfördelade med väntevärde μ. Ett återförsäkringsbolag erbjuder ett 1-årigt XL-skydd med en och endast en brytpunkt l. XL-skyddets pris är $(1+c)\,\mathrm{E}[R]$, där R betecknar den totala skadekostnaden för återförsäkringsbolaget. Bestäm ett explicit uttryck för priset. (10 p)

Uppgift 2

Betrakta ett försäkringsbolag med likvida tillångar med marknadsvärdet 100 idag 1 januari och åtaganden mot försäkringstagare vars värde L den 31 december har fördelning $N(\mu_L, \sigma_L^2)$ där $\mu_L = 100$ och $\sigma_L = 20$. Antag att tillgångarna som placeras i en räntefond har värdet A den 31 december med fördelning $N(\mu_A, \sigma_A^2)$ där $\mu_A = 120$ och $\sigma_A = 10$. Antag A och L är simultant normalfördelade. Är försäkringsbolaget solvent enligt solvenskriteriet $\mathrm{VaR}_{0.005}$ med 1-årshorizont för något värde på korrelationskoefficienten $\mathrm{Cor}(A, L)$? Om flera värden ger solvens, ange ett intervall för dessa värden. (10 p)

Uppgift 3

Antag att den totala skadekostnaden under ett år för en försäkringsprodukt ges av summan av skadekostnaden under lågsäsong och skadekostnaden under högsäsong, där dessa två delar av skadekostnaden kan anses oberoende. Antag att vi under de tre senaste åren har observerat paren $(100, 50)$, $(130, 40)$ och $(120, 60)$, där för vardera paret den första komponenten betecknar skadekostnad under högsäsong och den andra komponenten skadekostnad under lågsäsong. Antag vidare att de historiska observationerna antas vara utfall av oberoende och likafördelade bivariata stokastiska variabler. Beräkna, med hjälp av icke-parametrisk bootstrap, en skattning av den förväntade skadekostnaden för ett återförsäkringsbolag som erbjuder ett 1-årigt SL-skydd med en och endast en brytpunkt 170. (10 p)

Uppgift 4

För $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$, låt $C_{i,j}$ vara kumulativa utbetalda belopp till försäkringstagare under j utvecklingsår för skador under skadeår i. Inget betalas efter utvecklingsår 4. Den övre triangeln $\{C_{i,j} : i + j \leq 5\}$ har just blivit känd idag, tid 0. Antag att Macks fördelningsfria Chain Ladder kan användas för att prediktera utestående betalningar till försäkringstagare.

	1	2	3	4
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	$\mathbf{C_{2,4}}$
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$\mathbf{C_{3,3}}$	$\mathbf{C_{3,4}}$
4	$C_{4,1}$	$\mathbf{C_{4,2}}$	$\mathbf{C_{4,3}}$	$\mathbf{C_{4,4}}$

Table 1: Skadedata $C_{i,j}$ med kända kumulativa utbetalningar $(i + j \leq 5)$, samt framtida okända kumulativa utbetalningar för $i + j > 5$.

Låt $(X_1, \ldots, X_T)$ vara det framtida kassaflödet till försäkringstagarna orsakat av skador under tidigare skadeår. Antag att det värderas enligt

$$L_0 = \sum_{t=1}^{T} e^{-rt} \, \mathrm{E}[X_t \mid \mathcal{F}_0]$$

idag (tid 0), där $\mathrm{E}[X_t \mid \mathcal{F}_0]$ betecknar betingat väntevärde med avseende på informationen tillgänglig vid tid 0 och r är en given ränta. Beräkna en skattning av L_0 explicit i termer av kända utbetalda belopp och den givna räntan. (10 p)

Uppgift 5

Betrakta en 1-periodsmodell för värdering av ett försäkringsbolags aggregerade skuldkassaflde: tiden 0 är idag och tiden 1 är om ett år. 1-periodsmodellen innehåller en 1-årig nollkupongsobligation som ger upphov till en diskonteringsfaktor d. Pengar vid tiden 0 förräntas till tiden 1 genom köp av nollkupongsobligationer. Skuldkassaflödet svarar mot en stokastisk utbetalning till försäkringstagarna vid tiden 1 med väntevärde c. Försäkringsbolaget har vid tiden 0 kapitalet r som exakt svarar mot det som regelverket kräver. Beloppet l, $0 < l < r$, är reserverat för försäkringstagarna, och resterande belopp $r - l$ har tillhandahållits av bolagets ägare. Differensen av det tillgängliga kapitalet vid tiden 1 och den stokastiska utbetalningen till försäkringstagarna vid tiden 1 tillfaller bolagets ägare. Det diskonterade förväntade värdet av detta belopp är lika med $1 + \eta$ gånger det belopp som tillhandahållits av bolagets ägare för att uppfylla regelverkets kapitalkrav. Bestäm ett uttryck för l som en summa av två termer varav den ena är $d \cdot c$. (10 p)

Uppgift 1

Sätt $M = \sum_{k=1}^{N} I\{X_k > l\}$, dvs räkna endast skador över nivån l. Det gäller att att M är Poissonfördelad med parameter λp där $p = \mathrm{P}(X > l) = \exp(-l/\mu)$. Det gäller att $R = \sum_{k=1}^{M} Y_k$, där $M, Y_1, Y_2, \ldots$ är oberoende och

$$\mathrm{P}(Y > y) = \mathrm{P}(X - l > y \mid X > l) = \frac{\mathrm{P}(X > l + y)}{\mathrm{P}(X > l)} = \exp(-y/\mu),$$

dvs Y har samma fördelning som X. R har en sammansatt Poissonfördelning med väntevärde $\mathrm{E}[R] = \lambda p \mu$. XL-skyddets pris r $(1 + c) \exp(-l/\mu)\lambda\mu$.

Uppgift 2

Om $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ så gäller att, med $Z \sim N(0, 1)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_{0.005}(X) &= \mathrm{VaR}_{0.005}(\mu + \sigma Z) = F^{-1}_{-d(0,1)(\mu+\sigma Z)}(0.995) \\
&= d(0, 1)\big(-\mu + \sigma\Phi^{-1}(0.995)\big),
\end{aligned}$$

dvs $\mathrm{VaR}_{0.005}(X) \leq 0$ omm $\mu \geq \sigma\Phi^{-1}(0.995) \approx 2.58 \cdot \sigma$. Här, med $X = A - L$ fås

$$\begin{aligned}
\mu &= \mu_A - \mu_L = 20, \\
\sigma^2 &= \sigma_A^2 + \sigma_L^2 - 2\sigma_A\sigma_L \operatorname{Cor}(A, L) = \sigma_A^2(5 - 4\operatorname{Cor}(A, L)) \geq \sigma_A^2 = 10^2.
\end{aligned}$$

Alltså gäller att $\sigma\Phi^{-1}(0.995) > \mu$ för alla möjliga värden p $\operatorname{Cor}(A, L)$.

Uppgift 3

Bootstrapfördelningen sätter sannolikhetsmassan $1/9$ på vardera av de möjliga utfallen (h_k, l_k), $k = 1, \ldots, 9$,

$$(100, 50), (100, 40), (100, 60), (130, 50), (130, 40), (130, 60), (120, 50), (120, 40), (120, 60).$$

Endast tre av dessa svarar mot $\max(H + L - 170, 0) > 0$, vilket ger skattningen

$$\frac{1}{9} \sum_{k=1}^{9} \max(h_k + l_k - 170, 0) = \frac{40}{9}.$$

Uppgift 4

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_1 \mid \mathcal{F}_0] &= (f_3 - 1)C_{2,3} + (f_2 - 1)C_{3,2} + (f_1 - 1)C_{4,1}, \\
\mathrm{E}[X_2 \mid \mathcal{F}_0] &= f_2(f_3 - 1)C_{3,2} + f_1(f_2 - 1)C_{4,1}, \\
\mathrm{E}[X_3 \mid \mathcal{F}_0] &= f_1 f_2(f_3 - 1)C_{4,1}
\end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned}
L_0 = e^{-r}&\big((f_3 - 1)C_{2,3} + (f_2 - 1)C_{3,2} + (f_1 - 1)C_{4,1}\big) \\
&+ e^{-2r}\big(f_2(f_3 - 1)C_{3,2} + f_1(f_2 - 1)C_{4,1}\big) \\
&+ e^{-3r} f_1 f_2(f_3 - 1)C_{4,1}
\end{aligned}$$

Vi skattar f_1, f_2, f_3 med

$$\widehat{f}_1 = \frac{C_{1,2} + C_{2,2} + C_{3,2}}{C_{1,1} + C_{2,1} + C_{3,1}},$$
$$\widehat{f}_2 = \frac{C_{1,3} + C_{2,3}}{C_{1,2} + C_{2,2}},$$
$$\widehat{f}_3 = \frac{C_{1,4}}{C_{1,3}}.$$

Uppgift 5

Beskrivningen betyder att

$$d\left(\frac{r}{d} - c\right) = (1+\eta)(r-l)$$

vilket betyder att

$$\begin{aligned} l &= r - \frac{1}{1+\eta}\left(r - dc\right) \\ &= \frac{dc}{1+\eta} + \frac{\eta}{1+\eta} r \\ &= dc + \frac{\eta}{1+\eta}(r - dc) \end{aligned}$$