Matematiska institutionen, Stockholms universitet

Tentamen i MT7027, Riskmodeller och reservsättning inom sakförsäkring, 25 april 2024, 14:00–19:00.

Examinator: Filip Lindskog, lindskog@math.su.se

Tillåtna hjälpmedel: inga hjälpmedel.

Återlämning: meddelas via kursforum.

Argument och beräkningar ska vara tydliga och lätta att följa.

Eventuellt kan approximationerna $1-\Phi(1) \approx 0.159$, $1-\Phi(2) \approx 0.023$, $\Phi^{-1}(0.95) \approx 1.64$, $\Phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$, $\Phi^{-1}(0.995) \approx 2.58$ vara användbara, Φ är fördelningsfunktionen för standardnormalfördelningen.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Uppgift 1

Ett försäkringsbolag har sålt n identiska försäkringar. Skadeersättningens storlek för ett kontrakt som rapporterat skada har väntevärde μ och varians σ^2. Skadeersättningarnas storlek för olika kontrakt som rapporterat skador är oberoende. Med sannolikhet q är det kommande året ett normalår och med sannolikhet $1-q$ ett extremår. Givet ett normalår rapporterar kontrakten, oberoende av varandra, skada med sannolikhet p. Givet ett extremår rapporterar kontrakten, oberoende av varandra, skada med sannolikhet $2p$. Bestäm väntevärde och varians för den totala skadekostnaden för alla n kontrakt tillsammans. (10 p)

Uppgift 2

Baserat på historiska skadebelopp $z_1, \dots, z_n$ som anses vara utfall från en okänd skadefördelning studeras en qq-plot där de empiriska kvantilerna för det logaritmerade stickprovet (x-axeln) jämförs med motsvarande kvantilvärden för standardnormalfördelningen (y-axeln). Kvantilparen beskriver approximativt en rät linje $y = kx + m$. Ange (i termer av k, m, Φ) en skattning av fördelningsfuktionen för den okända skadefördelningen. (10 p)

Uppgift 3

Betrakta skadetriangeln i Tabell 1. För $i, j \in \{1, \dots, 4\}$, låt $C_{i,j}$ vara kumulativa utbetalda belopp till försäkringstagare under j utvecklingsår för skador under skadeår i. Inget betalas efter utvecklingsår 4. Den övre triangeln $\{C_{i,j} : i + j \leq 5\}$ har just blivit känd idag, tid 0.

(a) Macks fördelningsfria Chain Ladder antar tre egenskaper som de kumulativa utbetalda beloppen ska uppfylla. Beskriv dessa egenskaper. (5 p)

(b) Antag att de inkrementella beloppen $D_{i,j}$ är oberoende, där $D_{i,1} = C_{i,1}$ och $D_{i,j+1} = C_{i,j+1} - C_{i,j}$ för $j = 1, 2, 3$. Antag att $D_{i,j}$ är Poissonfördelad med väntevärde $\alpha_i \beta_j$ där $\beta_1 + \cdots + \beta_4 = 1$. I vilket utsträckning uppfyller eller uppfyller inte modellen egenskaperna för Macks fördelningsfria Chain Ladder? (5 p)

	1	2	3	4
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	$\mathbf{C_{2,4}}$
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$\mathbf{C_{3,3}}$	$\mathbf{C_{3,4}}$
4	$C_{4,1}$	$\mathbf{C_{4,2}}$	$\mathbf{C_{4,3}}$	$\mathbf{C_{4,4}}$

Table 1: Skadedata $C_{i,j}$ med kända kumulativa utbetalningar ($i+j \leq 5$), samt framtida okända kumulativa utbetalningar för $i+j>5$.

Uppgift 4

Betrakta skadetriangeln i Tabell 1. För $i,j \in \{1,\dots,4\}$, låt $C_{i,j}$ vara kumulativa utbetalda belopp till försäkringstagare under j utvecklingsår för skador under skadeår i. Inget betalas efter utvecklingsår 4. Den övre triangeln $\{C_{i,j} : i+j \leq 5\}$ har just blivit känd idag, tid 0.
Antag att det historiskt varit en årlig 5%-ig skadeinflation p.g.a. stigande reparationskostnader och att man vill prediktera framtida skadekostnader med Chain Ladder under antagandet att den historiskt observerade skadeinflationen har upphört. Beskriv tydligt hur skadedata i Tabell 1 bör transformeras för detta ändamål. (10 p)

Uppgift 5

Antag att ett försäkringsbolags åtagande mot sina kunder svarar mot ett kassaflöde $(C_1,\dots,C_{10})$ av årliga skadeersättningar under de kommande 10 åren. Nu svarar mot tid 0. Antag att $C_1,\dots,C_{10}$ är oberoende och alla normalfördelade med väntevärde μ och varians σ^2. Antag en kontinuerligt sammansatt ränta r för alla löptider, och att denna ränta inte ändras under det kommande året. Antag att försäkringsbolagets tillångar utgörs av ett belopp A_0 som investeras i en 1-årig nollkupongsobligation. Bestäm $\mathrm{VaR}_{0.005}(X)$, där X är nettovärdet vid tiden 1 för bolagets tillgångar och skulder då skulderna värderas enligt summan av diskonterade förväntade kassaflöden, betingat på det som är känt vid värderingstillfället. (10 p)

Uppgift 1

Låt $P(Y)$ beteckna sannolikheten för rapporterad skade som beror på typ av år: $\mathrm{P}(P(Y) = p) = q$ och $\mathrm{P}(P(Y) = 2p) = 1 - q$. Låt $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ vara totala skadekostnaden.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[S] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[S \mid Y]] = \mathrm{E}[nP(Y)\mu] = n\mu\,\mathrm{E}[P(Y)],\\
\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(S \mid Y)] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[S \mid Y])\\
&= \mathrm{E}[nP(Y)\sigma^2] + \mathrm{Var}(nP(Y)\mu)\\
&= n\sigma^2\,\mathrm{E}[P(Y)] + n^2\mu^2\,\mathrm{Var}(P(Y)),\\
\mathrm{E}[P(Y)] &= qp + (1-q)2p,\\
\mathrm{Var}(P(Y)) &= qp^2 + (1-q)(2p)^2 - \big(qp + (1-q)2p\big)^2
\end{aligned}
$$

Uppgift 2

Från qq-plot approximeras $Y \overset{\mathrm{d}}{=} kX + m$ där $X = \log Z$ och $Y \sim N(0,1)$. Detta ger

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z \le z) &= \mathrm{P}(X \le \log(z)) = \mathrm{P}((Y-m)/k \le \log(z)) = \mathrm{P}(Y \le k\log(z) + m)\\
&= \Phi(k\log(z) + m)
\end{aligned}
$$

Uppgift 3

(a) Se föreläsningsanteckningar.
(b) Oberoende skadeår liksom för Macks fördelningsfria Chain Ladder. Men,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[C_{i,j+1} \mid C_{i,1},\dots,C_{i,j}] &= C_{i,j} + \mathrm{E}[D_{i,j+1}] = C_{i,j} + \alpha_i\beta_{j+1},\\
\mathrm{Var}(C_{i,j+1} \mid C_{i,1},\dots,C_{i,j}) &= \mathrm{Var}(D_{i,j+1}) = \alpha_i\beta_{j+1}.
\end{aligned}
$$

Dessa egenskaper skiljer sig alltså från Macks fördelningsfria Chain Ladder.

Uppgift 4

Transformera till inkrementella belopp: $D_{i,1} = C_{i,1}$ och $D_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$ för $j > 1$. Justera enligt $\widetilde{D}_{i,j} = D_{i,j} \cdot 1.05^{5-(i+j)}$ för $i + j \le 5$. Transformera till kumulativa belopp: $\widetilde{C}_{i,1} = \widetilde{D}_{i,1}$ och $\widetilde{C}_{i,j} = \widetilde{C}_{i,j-1} + \widetilde{D}_{i,j}$ för $j > 1$ och $i + j \le 5$. Tillämpa CL på transformerad data.

Uppgift 5

$A_1 = A_0 e^r$ och

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \sum_{t=1}^{10} e^{-r(t-1)}\,\mathrm{E}[C_t \mid \mathcal{F}_1] = C_1 + \sum_{t=2}^{10} e^{-r(t-1)}\,\mathrm{E}[C_t]\\
&= C_1 + \mu \sum_{t=2}^{10} e^{-r(t-1)}.
\end{aligned}
$$

Alltså

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_{0.005}(A_1 - L_1) &= \mathrm{VaR}_{0.005}(C_1) - A_0 + \mu \sum_{t=2}^{10} e^{-rt} \\
&= e^{-r} F^{-1}_{\mu+\sigma Z}(0.995) - A_0 e^{r} + \mu \sum_{t=2}^{10} e^{-rt} \\
&= \mu \sum_{t=1}^{10} e^{-rt} + e^{-r}\sigma \Phi^{-1}(0.995) - A_0
\end{aligned}
$$