MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
24 april 2024

1. (a) Vi har att $\text{span}(S) = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}\}$, dvs $\text{span}(S)$ är mängden av alla linjärkombinationer av elementen i S. Att S spänner upp V betyder att $\text{span}(S) = V$.

   (b) Vi tar $S = \{1, x, x^2 + x^3, x^3\}$. Ingen av elementen har grad 2. Vi påstår att $\text{span}(S) = \mathrm{P}_3(\mathbb{R})$: ett godtyckligt polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ i $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ kan skrivas som en linjärkombination av elementen i S:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_0 \cdot 1 + a_1x + a_2(x^2 + x^3) + (a_3 - a_2)x^3.$$

   (c) Låt $S = \{v_1 - v_2,\ v_2 - v_3,\ v_3 - v_4,\ v_4\}$; vi behöver visa att $\text{span}(S) = V$. Det är uppenbart att $\text{span}(S) \subseteq V$, så vi behöver visa inklusionen $\text{span}(S) \supseteq V$, dvs att varje vektor $v \in V$ kan skrivas som en linjärkombination av $v_1 - v_2,\ v_2 - v_3,\ v_3 - v_4,\ v_4$. Låt $v \in V$. Eftersom $\text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = V$ så finns det $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \\ &= a_1(v_1 - v_2) + (a_1 + a_2)(v_2 - v_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(v_3 - v_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)v_4. \end{aligned}$$

   Alltså är $v \in \text{span}(S)$, och vi är klara.

2. (a) En funktion $T : V \to W$ kallas linjär om $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$ för alla $x, y \in V$ och $a, b \in \mathbb{F}$.

   (b) Vi börjar med att hitta T:s egenvektorer. Avbildningen kan skrivas som $T(x) = Ax$ där A är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Vi vet att T och A har samma egenvärden och egenvektorer, och att egenvärdena för A precis motsvarar rötterna till det karaktäristiska polynomet

$$\begin{vmatrix} 3-t & -1 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 0 & -1 & 3-t \end{vmatrix} = (3-t)(2-t)(3-t).$$

   Alltså är egenvärdena 2 och 3 (med algebraisk multiplicitet två). Vi beräknar nu de motsvarande egenrummen:

   $\mathbf{E_2}$: Egenrummet till egenvärdet 2 är precis nollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

   som består av alla vektorer (x_1, x_2, x_3) med $x_1 - x_2 = 0 = -x_2 + x_3$, dvs

$$E_2 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{E_3}$: Egenrummet till egenvärdet 3 är precis nollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta består av alla vektorer (x_1, x_2, x_3) med $x_2 = 0$, så

$$E_3 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vi kan alltså ta den eftersökta ordnade basen B av egenvektorer som

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Relativt denna bas har vi

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Slutligen beräknar vi basbytesmatrisen $[\mathrm{id}]_E^B$ genom

$$[\mathrm{id}]_E^B = \left([\mathrm{id}]_B^E\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

enligt det vanliga sättet att beräkna matrisinverser.

Svar:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad [T]_B^B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad [\mathrm{id}]_E^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Vi börjar med att notera att de tre givna vektorerna är linjärt oberoende, vilket kan ses genom att kolla först i de tredje komponenterna. Vi använder Gram–Schmidt algoritmen för att producera den eftersökta ON-basen. Låt först

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}}(1,1,1,1) = \tfrac{1}{2}(1,1,1,1).$$

Observera att u_1 är en enhetsvektor. Sedan låter vi

$$\begin{aligned} u_2 &= (1,1,0,0) - \operatorname{proj}_{u_1}(1,1,0,0) \\ &= (1,1,0,0) - \big(u_1 \bullet (1,1,0,0)\big)\, u_1 \\ &= (1,1,0,0) - \tfrac{1}{2}(1,1,1,1) \\ &= \tfrac{1}{2}(1,1,-1,-1). \end{aligned}$$

Notera att även u_2 är en enhetsvektor. Slutligen låter vi

$$\begin{aligned} u_3 &= (0,1,0,1) - \operatorname{proj}_{u_1}(0,1,0,1) - \operatorname{proj}_{u_2}(0,1,0,1) \\ &= (0,1,0,1) - \big(u_1 \bullet (0,1,0,1)\big)\, u_1 - 0 \\ &= (0,1,0,1) - \tfrac{1}{2}(1,1,1,1) \\ &= \tfrac{1}{2}(-1,1,-1,1). \end{aligned}$$

Vi har nu tre ortogonala enhetsvektorer u_1, u_2, u_3 som spänner upp samma delrum som de ursprungliga vektorerna, och som därmed utgör en ON-bas för V.

Enligt utlärd sats om ON-baser vet vi att

$$\begin{aligned} v &= (v \bullet u_1)u_1 + (v \bullet u_2)u_2 + (v \bullet u_3)u_3 \\ &= 4u_1 + u_2 + u_3. \end{aligned}$$

Svar: ON-bas $(u_1, u_2, u_3) = \Big(\tfrac{1}{2}(1,1,1,1), \tfrac{1}{2}(1,1,-1,-1), \tfrac{1}{2}(-1,1,-1,1)\Big)$,
och $v = 4u_1 + u_2 + u_3$.

4. (a) Om inre produkten på V betecknas $\langle\cdot,\cdot\rangle$, så är den efterfrågade adjungerade avbildningen T^* den unika avbildningen $T^* : V \to V$ som uppfyller att

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle \quad \text{för alla } v, w \in V.$$

(b) Om $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ och $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}^4$ så är

$$\langle T(z), w\rangle = \langle (0, z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3, w_4)\rangle = z_1\overline{w_2} + z_2\overline{w_3} + z_3\overline{w_4}.$$

Vi söker T^* sådan att detta är lika med $\langle (z_1, z_2, z_3, z_4), T^*(w)\rangle$. Vi ser från ovan formel att detta gäller för

$$T^*(w_1, w_2, w_3, w_4) = (w_2, w_3, w_4, 0),$$

vilket alltså är en formel för T^*.

(c) Enligt den komplexa spektralsatsen finns det en ON-bas för $\mathbb{C}^2$ bestående av egenvektorer för A om och endast om A är normal, dvs $A^*A = AA^*$. För den angivna matrisen A har vi att $A^* = -A$, så $A^*A = -AA = A(-A) = AA^*$. Alltså finns det en ON-bas för $\mathbb{C}^2$ bestående av egenvektorer för A.

5. (a) Med rang(A) menas $\dim\{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$, dvs dimensionen av bildrummet av avbildningen $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L_A(x) = Ax$.

(b) Vi söker, per definition, en faktorisering $A = U\Sigma V^*$ där U och V är ortogonala matriser och

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

där $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ är A:s singulärvärden. Faktiskt vet vi att $\sigma_2 > 0$ eftersom A har rang 2.

Enligt utlärd sats motsvarar de nollskilda singulärvärdena för A precis kvadratrötterna ur de nollskilda egenvärdena till A^*A, så vi beräknar denna matris.

Vi har att

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Eftersom denna matrisen är övertriangulär kan vi läsa av egenvärdena: 4 och 25. Singulärvärderna för A är därmed $\sigma_1 = 5$ och $\sigma_2 = 2$. Alltså ges matrisen Σ av

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För att hitta matrisen V beräknar vi egenvektorerna för A^*A motsvarande egenvärdena på sedvanligt sätt, och får

$$E_{25} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E_4 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi väljer normerade vektorer v_1, v_2 ur respektive egenrum, nämligen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nu låter vi V vara den ortogonala matrisen med dessa vektorer som kolonner:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Det sista steget är att hitta en ortogonal 3×3-matris U som uppfyller villkoren, vilket vi gör genom att bestämma dess (ortogonala) kolonner u_1, u_2, u_3. För detta använder vi att $Av_i = \sigma_i u_i$, dvs att $u_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i$, för $i = 1, 2$:

$$u_1 = \tfrac{1}{5} Av_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \tfrac{1}{2} Av_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi är sedan fria att välja den sista kolonnen u_3 hur som helst sådan att matrisen U är en ortogonal matris; vi väljer

$$u_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

som är normerad och ortogonal mot både u_1 och u_2. Därmed har vi:

Svar: En singulärvärdesuppdelning ges av $A = U\,\Sigma\,V^*$, där

$$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Den algebraiska multipliciteten av λ är det största heltalet n sådant att $(t-\lambda)^n$ delar det karaktäristiska polynomet $\det(A - tI)$ till A.

   Den geometriska multipliciteten av λ är $\dim\{v \in \mathbb{F}^n : Av = \lambda v\}$, dvs dimensionen av egenrummet för egenvärdet λ.

   (b) Definitionen av att λ är ett egenvärde till A är att det finns en nollskild vektor $x \in \mathbb{C}^n$ sådan att $Ax = \lambda x$. Vi har alltså att

$$\begin{aligned} \lambda \text{ är ett egenvärde till } A &\iff \text{det finns en nollskild } x \in \mathbb{C}^n \text{ sådan att } Ax = \lambda x \\ &\iff \text{det finns en nollskild } x \in \mathbb{C}^n \text{ sådan att } (A - \lambda I)x = 0 \\ &\iff \text{matrisen } (A - \lambda I) \text{ inte är inverterbar} \\ &\iff \det(A - \lambda I) = 0, \end{aligned}$$

   där de sista två ekvivalenserna använder sig av de olika karaktäriseringerna av inverterbarhet. Alltså gäller

$$\lambda \text{ är ett egenvärde till } A \iff t = \lambda \text{ är en lösning till } \det(A - tI) = 0,$$

   och detta sista påstående säger precis att λ är en rot till det karaktäristiska polynomet för A.