STOCKHOLMS UNIVERSITET	MT5018
MATEMATISKA INSTITUTIONEN	TENTAMEN
Avd. Matematisk statistik	21 maj 2024

Tentamen i Sannolikhetsteori II, 21 maj 2024

Examinator: Mia Deijfen.
Tillåtna hjälpmedel: Tabell över sannolikhetsfördelningar som delas ut vid tentamenstillfället. Miniräknare är ej tillåtna.
Återlämning: Resultat läggs in i ladok senast tisdag 3 juni.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Tentamen är indelad i en basdel och en betygsgrundande del, vilka består av 30 poäng vardera. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även den betygsgrundande delen. Nedanstående gränser gäller för de olika betygsstegen. Resonemang ska vara klara och tydliga.

	Betyg				
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
Basdel	20	20	20	20	20
Betygsgrundande del	25	19	13	7	0

Basdel

Uppgift 1

Den tvådimensionella stokastiska variabeln (X,Y) har simultan täthetsfunktion

$$f(x,y) = 2(x+y) \quad 0 < x < y < 1.$$

a) Bestäm den betingade tätheten för X givet att $Y = y$.

b) Bestäm $\mathbb{E}[X|Y = y]$ och $P(\mathbb{E}[X|Y] \leq 1)$.

c) Beräkna $\mathbb{E}[X]$.

Uppgift 2

Låt N och $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende stokastiska variabler med $N \sim \text{Po}(\mu)$ och $X_i \sim \text{Po}(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots$.

a) Bestäm den sannolikhetsgenererande funktionen för $S_N := X_1 + \ldots + X_N$.

b) Bestäm $P(S_N = 0)$ och $P(S_N = 1)$.

c) Ange $\mathbb{E}[S_N]$.

Uppgift 3

Den tvådimensionella stokastiska vektorn $(X_1, X_2)'$ är multivariat normalfördelad med $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$, $\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = 1$ och $\text{Cov}(X_1, X_2) = 1/2$.

a) Vilken fördelning har $X_1 + X_2$?

b) För vilka värden på konstanten a gäller att $X_1 + X_2$ och $X_1 + aX_2$ är oberoende?

Betygsgrundande del

Uppgift 4

Antalet α-partiklar som avges av ett radioaktivt ämne under en given timme är Poisson(λ)-fördelat. En partikeldetektor registrerar en given partikel med sannolikhet $p \in (0,1)$. Partiklar registreras oberoende av varandra. Låt N beteckna antalet avgivna partiklar under den givna timmen och X antalet registrerade partiklar.

a) Givet att $N = n$ så har X en bekant fördelning. Vilken?

b) Härled (den obetingade) sannolikhetsfunktionen för X.

c) Härled den betingade sannolikhetsfunktionen för N givet att $X = x$.

Uppgift 5

Låt $X \sim \text{Exp}(1/2)$ och $Y \sim \text{Exp}(1)$, och antag att X och Y är oberoende. Sätt $U = X + Y$ och $V = X/(X + Y)$.

a) Bestäm den simultana täthetsfunktionen för (U, V).

b) Bestäm de marginella täthetsfunktionerna för U och V. Är U och V oberoende?

Uppgift 6

Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende lika fördelade stokastiska variabler med $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ och $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Definiera $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ och $\bar{X}_n = S_n/n$. Visa att man kan välja konstanterna $\{a_n\}_{n\geq 1}$ så att

$$\frac{\left(\bar{X}_n\right)^2 - \mu^2}{a_n} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{då } n \to \infty.$$

Kända satser får användas utan bevis, men man måste motivera att förutsättningarna är uppfylla.

Ledning: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Lycka till!