STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD, JT

LÖSNINGAR
21 maj 2024

Lösningar

21 maj 2024

Uppgift 1

a) Enligt definitionen av betingad täthetsfunktion gäller att

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Vi har

$$f_Y(y) = \int_0^y f_{X,Y}(x,y)dx = 3y^2 \quad \text{för } 0 < y < 1$$

och får alltså för $0 < y < 1$ att

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{2(x+y)}{3y^2} & \text{för } 0 < x < y; \\ 0 & \text{för } x \notin (0,y). \end{cases}$$

b) $\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_0^y x f_{X|Y=y}(x)dx = \frac{5y}{9}$

c) Eftersom $5Y/9 < 1$ för $Y < 1$, följer att $P(\mathbb{E}[X|Y] \leq 1) = 1$.

d) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[E[X|Y]] = \frac{5}{9}\mathbf{E}[Y] = \frac{5}{3}\int_0^1 y^3 dy = \frac{5}{12}$

Uppgift 2

a) Eftersom N och $X_1,X_2,\ldots$ är oberoende, så har vi enligt sats i boken att $g_{S_N}(t) = g_N(g_X(t))$. Från formelsamlingen fås att $g_N(t) = e^{\mu(t-1)}$ och $g_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ och alltså följer att

$$g_{S_N}(t) = e^{\mu(e^{\lambda(t-1)}-1)}.$$

b) Vi har att

$$P(S_N = 0) = g_{S_N}(0) = e^{\mu(e^{-\lambda}-1)}$$

och

$$P(S_N = 1) = g''_{S_N}(0) = \mu\lambda e^{\lambda(t-1)} e^{\mu(e^{\lambda(t-1)}-1)}\Big|_{t=0} = \mu\lambda e^{\mu(e^{-1}-1)-\lambda}.$$

c) $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X] = \mu\lambda$

Uppgift 3

Vektorn $\mathbf{X} = (X_1,X_2)'$ är multivariat normalfördelad med väntevärdesvektor $\mathbf{0}$ och kovariansmatris $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Vi har att $X_1 + X_2 = \mathbf{a}'\mathbf{X}$ där $\mathbf{a}' = (1\ 1)$ och alltså gäller att $X_1 + X_2 \sim \mathrm{N}(\mathbf{a}'\mathbf{0},\mathbf{a}'\Lambda\mathbf{a})$, dvs $X_1 + X_2 \sim \mathrm{N}(0,3)$.

b) Låt $\mathbf{Y} = (X_1 + X_2, X_1 + aX_2)'$. Då är $\mathbf{Y} = B\mathbf{X}$, där $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, och $\mathbf{Y}$ är alltså multivariat normalfördelad med

$$\Lambda_Y = B\Lambda B' = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2}(a+1) \\ \frac{3}{2}(a+1) & 1 + a + a^2 \end{bmatrix}.$$

Alltså är $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2) = 0$ omm $a = -1$ och eftersom $\mathbf{Y}$ är multivariat normalfördelad så är då Y_1 och Y_2 oberoende omm $a = -1$.

Uppgift 4

a) $X|N = n \sim \mathrm{Bin}\ (n,p)$.

a) Se Gut Exempel 3.2 i kapitel II. Vi får att $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda p)$.

b) Vi har, för $n \geq x$, att

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = n|X = x) &= \frac{\mathbb{P}(N = n, X = x)}{\mathbb{P}(X = x)} = \frac{\mathbb{P}(X = x|N = n)}{\mathbb{P}(X = x)} \\ &= \frac{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{1-x} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}}{\frac{(\lambda p)^x}{x!} e^{-\lambda p}} \\ &= \frac{(\lambda(1-p))^{n-x}}{(n-x)!} e^{-\lambda(1-p)}. \end{aligned}$$

(Detta är en Poissonfördelning med parameter $\lambda(1-p)$ skiftad till x.)

Uppgift 5

a) Tätheten för (X,Y) ges av $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = 2e^{-2x}e^{-y}$. Vi använder transformationssatsen för att bestämma tätheten för (U,V). Transformationen har invers

$$X = UV, \quad Y = U(1-V), \quad J = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u.$$

Vi får alltså, för $u > 0$ och $0 < v < 1$, att

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(uv,u(1-v)) \cdot |-u| = 2e^{-2uv}e^{-u(1-v)} = 2ue^{-u(v+1)}.$$

För övriga u och v gäller att $f_{U,V}(u,v) = 0$.

b) För $u > 0$ får vi

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)dv = 2e^{-u}\int_0^1 ue^{-uv}dv = 2e^{-u}(1-e^{-u})$$

och för $0 < v < 1$ att

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)du = \frac{2}{v+1}\int_0^{\infty} u(v+1)e^{-u(v+1)}du = \frac{2}{(v+1)^2},$$

där den sista likheten följer av att vi identifierar integralen som väntevärdet i en $\text{Exp}((v+1)^{-1})$-fördelning (alternativt partialintegration). Vi ser att $f_{U,V}(u,v) \neq f_U(u)f_V(v)$, så U och V är inte oberoende.

Uppgift 6

Vi har att $(\bar{X}_n)^2 - \mu^2 = (\bar{X}_n + \mu)(\bar{X}_n - \mu)$. Enligt Centrala gränsvärdessatsen gäller att

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

och enligt stora talens lag att

$$\frac{\bar{X}_n + \mu}{2\mu} \xrightarrow{p} 1.$$

Med $a_n = \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{n}}$ följer då från Slutsky's sats att

$$\frac{(\bar{X}_n)^2 - \mu^2}{a_n} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \cdot \frac{\bar{X}_n + \mu}{2\mu} \xrightarrow{d} N(0,1).$$