Matematik I – Analys del 2

Lösningsskiss till tentamen 2024-05-27

1. Nämnaren har nollställena $x = -2$ samt $x = 5$. Därför har vi en partialbråksuppdelning

$$f(x) = \frac{5x-11}{x^2-3x-10} = \frac{5x-11}{(x+2)(x-5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-5},$$

med reella konstanter A, B. "Handpåläggning" ger

$$A = \frac{5x-11}{x-5}\Big|_{x=-2} = \frac{-21}{-7} = 3 \quad \text{och} \quad B = \frac{5x-11}{x+2}\Big|_{x=5} = \frac{14}{7} = 2.$$

Därför får vi

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x+2}\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x-5}\mathrm{d}x = 3\ln|x+2| + 2\ln|x-5| + C,$$

där $C \in \mathbb{R}$.

2. Vi har

$$f'(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1+3x}}, \quad f''(x) = -\frac{9}{4}\frac{1}{\sqrt{1+3x}^3}, \quad f'''(x) = \frac{81}{8}\frac{1}{\sqrt{1+3x}^5}.$$

Maclaurinpolynomet av grad 2 är

$$p_2(x) = 1 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2.$$

Resttermen ges av

$$R_3(x) = \frac{27}{16}\frac{1}{\sqrt{1+3\xi}^5}x^3,$$

där ξ ligger mellan 0 och x. Ifall $0 \le x \le 0{,}1$ är alltså $\xi \ge 0$ och därför erhåller vi feluppskattningen

$$|R_3(x)| = \frac{27}{16}\frac{1}{\sqrt{1+3\xi}^5}|x|^3 \le \frac{27}{16}0{,}1^3 = \frac{27}{16}\cdot 10^{-3}.$$

3. Vi hittar stationära punkter genom att hitta gemensamma nollställen av

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 3y^2.$$

$2xy = 0$ löses av $x = 0$ eller $y = 0$, och insatt i den andra ekvationen ger $x = 0$ att $y = 0$ och tvärtom. Den enda stationära punkten är då $(0,0)$ med $f(0,0) = 0$.

Randen består av halvcirkeln $x^2 + y^2 = 16, y \ge 0$, med radie 4 samt $y = 0, -4 \le x \le 4$. Vi parametriserar halvcirkeln med $x = 4\cos(t), y = 4\sin(t)$, $0 \le t \le \pi$, och får då

$$f(x,y) = y(x^2+y^2) = 64\sin(t), \quad 0 \le t \le \pi.$$

Största värdet på halvcirkeln är därför 64 och minsta värdet noll. På $y = 0$ har vi $f(x,y) = 0$ konstant. Därför är funktionens största värde på hela området 64 och dess minsta värde noll.

4. (a) En skiss ger

$$\int_1^2 \int_{y^2}^4 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

(b) Med polära koordinater $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, där $1 \le r \le 2$ och $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$ har vi

$$\begin{aligned}\iint_D xye^{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta\,\cos\theta\, r^3 e^{r^4}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\left[e^{r^4}\right]_1^2 \frac{1}{2}\left[\sin^2\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{16}-e\right)\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}e\left(e^{15}-1\right).\end{aligned}$$

5. Den homogena DE:n $y'' - 2y' - 8y = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r - 8 = 0$ med lösningar $r = -2$ samt $r = 4$. Därför ges den allmänna lösningen till den homogena DE:n av

$$y_\mathrm{h}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}$$

med konstanter $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

För att lösa den inhomogena DE:n väljer vi ansatsen

$$y_\mathrm{p}(x) = Axe^{-2x}$$

på grund av resonansfall (e^{-2x} löser den homogena DE:n). Derivator:

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p}'(x) &= A\,(1-2x)\,e^{-2x}, \\ y_\mathrm{p}''(x) &= A\,(4x-4)\,e^{-2x}. \end{aligned}$$

Insättning i DE:n ger

$$e^{-2x} = Ae^{-2x}(-6),$$

och jämförelse av koefficienterna leder till $A = -\frac{1}{6}$. Vi får alltså

$$y_\mathrm{p}(x) = -\frac{1}{6}xe^{-2x},$$

och den allmänna lösningen är

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} - \frac{1}{6}xe^{-2x}.$$

6. (a) (x_0, y_0) kallas stationär punkt om f är partiellt deriverbar i (x_0, y_0) och

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

(b) Om (x_0, y_0) är en stationär punkt till båda f och g, så har vi med produktregeln för envariabelfunktioner

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}_{=0} + g(x_0,y_0)\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}_{=0} = 0$$

och analogt $\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Därför är (x_0, y_0) en stationär punkt till h.

Slutsatsen att h har ett lokalt maximum i (x_0, y_0) om detta gäller för f och g gäller inte allmänt. Betrakta t.ex.

$$f(x,y) = 2 - (x^2 + y^2), \quad g(x,y) = -2 - (x^2 + y^2).$$

Båda har ett lokalt maximum i $(0,0)$ (paraboloider öppnad nedåt). Men

$$h(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 4$$

har ett lokalt minimum i $(0,0)$, då

$$h(x,y) \geq -4 = h(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$