MM4001 Tentamen MatNat II 2024-06-11

(1) Euklides algoritm:

$$56 = 4 \cdot 13 + 4$$
$$13 = 3 \cdot 4 + 1,$$

särskilt $SGD(56, 13) = 1$. Lös ut resterna:

$$1 = 13 - 3 \cdot 4 = 13 - 3 \cdot (56 - 4 \cdot 13)$$
$$= 13 \cdot 13 + 56 \cdot (-3).$$

$\Rightarrow$ $(13, -3)$ lösning till $13x + 56y = 1$

$\Rightarrow$ $(65, -15)$ lösning till $13x + 56y = 5$.

Allmän lösning:

$$\begin{cases} x = 65 - 56n, \\ y = -15 + 13n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(2)
$$f(x) = (2x-1)\sin(x)$$
$$f'(x) = 2\sin(x) + (2x-1)\cos(x)$$
$$f''(x) = 2\cos(x) + 2\cos(x) + (2x-1)(-\sin(x))$$
$$= 4\cos(x) - (2x-1)\sin(x)$$
$$f'''(x) = -4\sin(x) - 2\sin(x) - (2x-1)\cos(x)$$
$$= -6\sin(x) - (2x-1)\cos(x)$$
$$f^{(4)}(x) = -6\cos(x) - 2\cos(x) + (2x-1)\sin(x)$$
$$= -8\cos(x) + (2x-1)\sin(x)$$

$\Rightarrow \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = -1, \quad f''(0) = 4, \quad f'''(0) = 1$

$$\Rightarrow \quad p_3(x) = -x + 2x^2 + \frac{x^3}{6}$$

Feluppskattning: För ett visst ξ mellan 0 och x:

$$|R_4(x)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{24} x^4 = \left(|-8\cos(\xi) + (2\xi - 1)\sin(\xi)|\right)\frac{x^4}{24}$$

$$\leq \Big(8 \underbrace{|\cos(\xi)|}_{\leq 1} + \underbrace{(2|\xi|+1)}_{\leq 2 \cdot 0{,}1 + 1 \leq 2} \underbrace{|\sin(\xi)|}_{\leq 1} \Big) \frac{x^4}{24}$$

$$\leq \frac{10}{24} \cdot 0{,}1^4 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

för $-0{,}1 \leq x \leq 0{,}1$ (och då även $|\xi| \leq 0{,}1$).

3 (a) Vi räknar modulo 10:

$$(2^{30} + 3^{42})^{14} = (8^{10} + 9^{21})^{14} = ((-2)^{10} + (-1)^{21})^{14}$$

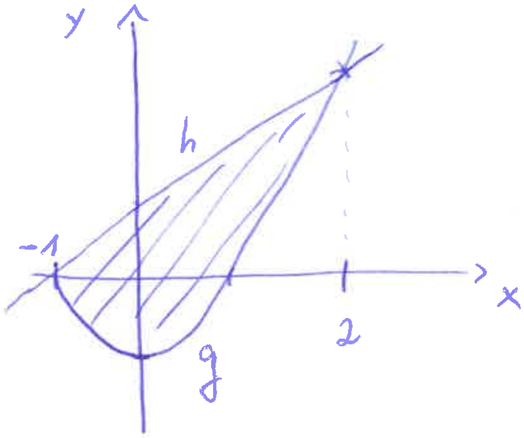
$$= (1024 - 1)^{14} = 1023^{14} = 3^{14}$$

$$= 9^7 = (-1)^7 = -1 = 9 \quad (\text{mod } 10).$$

$\Rightarrow$ sista siffran är 9.

(b) 4 möjliga val på första och samtidigt sista siffra: 2, 4, 6, 8. I varje fall återstår 5 siffror att väljas mellan 0 och 9. Enligt multiplikationsprincipen är svaret $4 \cdot 10^5 = 400000$.

④ (a)



$$\iint_{D_1} x\,dx\,dy = \int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{x+1} x\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \Big[xy \Big]_{y=x^2-1}^{x+1} dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \Big(x(x+1) - x(x^2-1) \Big) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(-x^3 + x^2 + 2x \right) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^{2}$$

$$= -4 + \frac{8}{3} + 4 - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 \right) = 2 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$$

(b) Polära koordinater, $x = r\cos(\vartheta)$, $y = r\sin(\vartheta)$, $1 \le r \le 2$, $\frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$:

$$\iint_{D_2} xy\, e^{(x^2+y^2)^2} dx\,dy = \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} r\cos(\vartheta)\, r\sin(\vartheta)\, e^{r^4}\, r\, d\vartheta\, dr$$

$$= \int_1^2 r^3 e^{r^4} dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{4}\Big[e^{r^4} \Big]_1^2 \cdot \frac{1}{2} \Big[\sin^2(\vartheta) \Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{16} - e \right)\left(1 - \tfrac{1}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{e}{16}\left(e^{15} - 1 \right)}}$$

⑤ (a) En normalvektor till linjen är $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ortogonalprojektion:

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{8}(2x-2y)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ i standardbasen.

(b) $\det(A) = 2 - 18 = -16 \neq 0 \Rightarrow F$ inverterbar.

Om B är basbytesmatrisen från ~~standard~~ basen $\mathbb{B}$ till standard basen, så är

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Invertering ger $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$A_{\mathbb{B}} = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

⑥ Tangentplanet i en punkt (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy$$

$$\Rightarrow \quad \Pi: z = 3x_0 y_0^2 + 3y_0^2(x - x_0) + 6x_0 y_0 (y - y_0).$$

En normalvektor ges av $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3y_0^2 \\ 6x_0 y_0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

En normalvektor till $6x + 6y - 2z = 1$ ges av

$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$. Planen är parallella om det

finns $\lambda \in \mathbb{R}$ sådant att

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3y_0^2 \\ 6x_0 y_0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 2, \quad \begin{cases} 6 = 6y_0^2 & \Rightarrow \quad y_0 = \pm 1 \\ 6 = 12 x_0 y_0 & \Rightarrow \quad x_0 = \begin{cases} 1/2 \text{ om } y_0 = 1 \\ -1/2 \text{ om } y_0 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ två punkter, där planen är parallella:

$(x_0, y_0) = (-\frac{1}{2}, -1)$ samt $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, 1)$.