

## Tentamen i Sannolikhetssteori II, 15 augusti 2024

*Examinator:* Mia Deijfen.

*Tillåtna hjälpmedel:* Tabell över sannolikhetsfördelningar som delas ut vid tentamenstillfället. Miniräknare är ej tillåtna.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Tentamen är indelad i en basdel och en betygsgrundande del, som består av 30 poäng vardera. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även den betygsgrundande delen. Nedanstående gränser gäller för de olika betygsstegen. Resonemang ska vara klara och tydliga.

|                     | Betyg |    |    |    |    |
|---------------------|-------|----|----|----|----|
|                     | A     | B  | C  | D  | E  |
| Basdel              | 20    | 20 | 20 | 20 | 20 |
| Betygsgrundande del | 25    | 19 | 13 | 7  | 0  |

### Basdel

#### Uppgift 1

Den tvådimensionella stokastiska variabeln  $(X,Y)$  har simultan täthetsfunktion

$$f(x,y) = cx, \quad x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1,$$

där  $c$  är en konstant.

a) Bestäm  $c$ .

b) Bestäm den betingade tätheten för  $X$  givet att  $Y = y$ , och den betingade tätheten för  $Y$  givet att  $X = x$ .

c) Bestäm  $\mathbb{E}[X|Y = y]$  och  $\mathbb{E}[Y|X = x]$ .

## Uppgift 2

Låt  $X$  vara en icke-negativ heltalsvärd stokastisk variabel vars sannolikhetsgenererande funktion ges av  $g_X(t) = \frac{1}{10}(4t + 6t^3)$ .

- a) Bestäm sannolikhetsfunktionen för  $X$ .
- b) Låt  $Y$  vara en stokastisk variabel som är oberoende av  $X$  och har samma fördelning som  $X$ . Bestäm den sannolikhetsgenererande funktionen för  $X+Y$ .
- c) Bestäm sannolikhetsfunktionen för  $X + Y$ .

## Uppgift 3

Den stokastiska vektorn  $(X,Y)'$  är multivariat normalfördelad med  $\mathbb{E}[X] = 2$ ,  $\mathbb{E}[Y] = 3$ ,  $\text{Var}(X) = 2$ ,  $\text{Var}(Y) = 4$  och  $\text{Cov}(X,Y) = a$ , där  $a$  är ett reellt tal.

- a) Vilken fördelning har vektorn  $(X + 2Y, 2X - Y)'$ ?
- b) För vilka värden på  $a$  gäller att  $X + 2Y$  och  $2X - Y$  är oberoende?

## Betygsgrundande del

## Uppgift 4

Låt  $X \sim \text{Exp}(\beta)$  och  $Y \sim \Gamma(2,\beta)$ , och antag att  $X$  och  $Y$  är oberoende.

- a) Bestäm den simultana täthetsfunktionen för  $X + Y$  och  $X/Y$ .
- b) Är  $X + Y$  och  $X/Y$  oberoende?

## Uppgift 5

En sammanhängande regnperiod i ett visst tropiskt land varar i  $X$  dagar, där  $X$  är Fs-fördelad ('First success') med väntevärde  $d$  dagar. Under dag nr  $i$  i en regnperiod faller det  $Y_i$  mm regn, där alla  $Y_i$  är exponentialfördelade med väntevärde  $\mu$  mm. Alla variabler  $X, Y_1, Y_2, \dots$  är oberoende. Bestäm fördelningen för den totala regnmängden under en regnperiod.

**Uppgift 6**

Låt  $X$  vara en Poissonfördelad stokastisk variabel med stokastisk parameter  $M$ , dvs  $X|M = m \sim \text{Po}(m)$ . Parametern  $M$  har väntevärde 1 och ändlig varians  $\sigma^2 > 0$ . Låt  $X_1, X_2, \dots$  vara oberoende observationer av  $X$ .

a) Bestäm  $\mathbb{E}[X]$  och  $\text{Var}(X)$ .

b) Antag att  $\sigma^2 = 1$  och definiera

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{2n}}.$$

Visa att  $Y_n$  konvergerar i fördelning då  $n \rightarrow \infty$  och ange gränsfördelningen.

b) Antag att  $\sigma^2$  är okänd, men kan skattas ur observationerna  $X_1, \dots, X_n$  med hjälp av en funktion  $\hat{\sigma}_n^2 = f(X_1, \dots, X_n)$  på ett sådant sätt att  $\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$  då  $n \rightarrow \infty$ . Låt

$$\tilde{Y}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{(1 + \hat{\sigma}_n^2)n}}.$$

Visa att  $\tilde{Y}_n$  konvergerar i fördelning då  $n \rightarrow \infty$  och bestäm gränsfördelningen.

**Lycka till!**