STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD,

LÖSNINGAR
15 augusti 2024

Lösningar

15 augusti 2024

Uppgift 1

a) Konstanten c bestäms ut villkoret $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$. Vi har

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} cxdx\right) dy = c/6$$

och får alltså $c = 6$.

b) Enligt definitionen av betingad täthetsfunktion gäller att

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Vi har $f_Y(y) = \int_0^{1-y} 6xdx = 3(1-y)^2$ för $y \in (0,1)$ och får alltså för $y \in (0,1)$ att

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{(1-y)^2} & \text{för } x \in (0,1-y); \\ 0 & \text{för } x \notin (0,y). \end{cases}$$

Den betingade tätheten $f_{Y|X=x}(y)$ bestäms på analogt sätt. Vi har $f_X(x) = \int_0^{1-x} 6xdy = 6x(1-x)$ för $x \in (0,1)$ och får för $x \in (0,1)$ att

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{för } y \in (0,1-x); \\ 0 & \text{för } y \notin (0,1-x). \end{cases}$$

c) Vi har

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \int_0^{1-y} \frac{2x^2}{(1-y)^2}dx = \frac{2}{3}(1-y) \quad \text{för } y \in (0,1),$$

och

$$\mathbb{E}[Y|X=x] = \int_0^{1-x} \frac{y}{(1-x)}dy = \frac{1-x}{2} \quad \text{för } x \in (0,1).$$

Uppgift 2

a) Vi har att $g_X(t) = \mathbf{E}[t^X] = \sum_n \mathbb{P}(X = n)t^n$ och alltså gäller att $\mathbb{P}(X = 1) = 0.4$ och $\mathbb{P}(X = 3) = 0.6$.

b)

$$g_{X+Y}(t) = \mathbf{E}[t^{X+Y}] \overset{ober}{=} \mathbf{E}[t^X]\mathbf{E}[t^Y] = \frac{1}{100}(4t+6t^3)^2 = \frac{1}{100}(16t^2+48t^4+36t^6).$$

c) På samma sätt som i a) läser vi av sannolikhetsfunktionen som koefficienterna i den sannolikhetsgenererande funktionen och får $\mathbb{P}(X+Y = 2) = 0.16$, $\mathbb{P}(X + Y = 4) = 0.48$ och $\mathbb{P}(X + Y = 6) = 0.36$.

Uppgift 3

Vektorn $(X,Y)'$ är multivariat normalfördelad med väntevärdesvektor $\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och kovariansmatris $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 4 \end{pmatrix}$.

a) Vi har att

$$\begin{pmatrix} X + 2Y \\ 2X - Y \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{där } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

och alltså gäller att $(X+2Y,2X-Y)'$ är multivariat normalfördelad med väntevärdesvektor $B\mu = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ och kovariansmatris $\mathbf{B}\Lambda\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 4a + 18 & 3a - 4 \\ 3a - 4 & 12 - 4a \end{pmatrix}$.

b) Eftersom $(X + 2Y,2X - Y)'$ är multivariat normalfördelad så gäller att komponenterna är oberoende omm de är okorrelerade. Enligt b) har vi att $\mathrm{Cov}(X + 2Y,2X - Y) = 3a - 4$ och komponenterna är alltså okorrelerade omm $a = 4/3$.

Uppgift 4

a) Eftersom X och Y är oberoende har vi att

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{\beta^3} y e^{-(x+y)/\beta}.$$

Låt $U = X + Y$ och $V = X/Y$, så att $X = \frac{UV}{1+V}$ och $Y = \frac{U}{1+V}$. Enligt transformationssatsen gäller att

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(uv/(1 + v),u/(1 + v)) \cdot |J|$$

där

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \end{pmatrix} = -\frac{u}{(1+v)^2}.$$

Vi får

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{\beta^3} \frac{u^2}{(1+v)^3} e^{-u/\beta} = \frac{1}{2\beta^3} u^2 e^{-u/\beta} \cdot \frac{2}{(1+v)^3}.$$

b) Enligt a) har vi att $f_{U,V}(u,v) = g(u)h(v)$ där $g(u)$ och $h(v)$ är täthetsfunktioner som beskriver marginalfördelningen för U respektive V. Alltså är U och V oberoende.

Uppgift 5

Den totala regnmängden under en regnperiod ges av $Z = \sum_{i=1}^{X} Y_i$, dvs en summa av ett stokastiskt antal oberoende lika fördelade variabler. Enligt sats i boken ges den momentgenererande funktionen för Z av $\Psi_Z(t) = g_X(\Psi_Y(t))$. Vi har att $X \sim \text{Fs}(1/d)$ och alltså (enligt formelsamlingen)

$$g_X(t) = \frac{t \cdot \frac{1}{d}}{1 - (1 - \frac{1}{d})t}.$$

Vidare har vi att $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ och

$$\Psi_Y(t) = \frac{1}{1 - \mu t}.$$

Alltså gäller att

$$\Psi_Z(t) = g_X\left(\frac{1}{1-\mu t}\right) = \frac{\frac{1}{1-\mu t} \cdot \frac{1}{d}}{1 - (1 - \frac{1}{d}) \cdot \frac{1}{1-\mu t}} = \frac{1}{1 - \mu d t}.$$

Detta är den momentgenererande funktionen för en $\text{Exp}(\mu d)$-variabel och eftersom fördelningen bestäms entydigt av den momentgenererande funktionen drar vi slutsatsen att $Z \sim \text{Exp}(\mu d)$.

Uppgift 6

a) Vi har att

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X|M]] = \mathbf{E}[M] = 1$$

och

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}[\mathrm{Var}(X|M)] + \mathrm{Var}(\mathbf{E}[X|M]) = \mathbf{E}[M] + \mathrm{Var}(M) = 1 + \sigma^2.$$

b) För $\sigma^2 = 1$ gäller att $\mathrm{Var}(X) = 2$ och det följer direkt från Centrala gränsvärdessatsen att Y_n konvergerar i fördelning mot en $N(0,1)$-fördelning.

c) För väntevärdet gäller fortfarande att $\mathbf{E}[X] = 1$ och för variansen har vi enligt ovan att $\mathrm{Var}(X) = 1 + \mathrm{Var}(M)$. Om $\mathrm{Var}(M)$ skattas av $\hat{\sigma}_n^2$ så skattas $\mathrm{Var}(X)$ alltså naturligen av $1 + \hat{\sigma}_n^2$ och eftersom $\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{p} \mathrm{Var}(M)$ så följer att $1 + \hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{p} \mathrm{Var}(X)$. Skriv

$$\widetilde{Y}_n = \frac{\sum_1^n X_i - n}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot n}} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{1 + \hat{\sigma}_n^2}}.$$

Enligt Centrala gränsvärdessatsen gäller att $(\sum_1^n X_i - n)/\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot n}$ konvergerar i fördelning mot en $N(0,1)$-variabel. Eftersom $1 + \hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{p} \mathrm{Var}(X)$ och funktionen $g(x) = \sqrt{\mathrm{Var(X)}/x}$ är kontinuerlig för alla positiva x så har vi att $\sqrt{\mathrm{Var}(X)/(1 + \hat{\sigma}_n^2)}$ konvergerar i sannolikhet mot 1. Alltså gäller att $\widetilde{Y}_n$ konvergerar i fördelning mot $N(0,1)$.