MATEMATISKA INSTITUTIONEN	Tentamensskrivning i
STOCKHOLMS UNIVERSITET	Linjär algebra, MM5012
Avd. Matematik	7.5 hp
Examinator: Olof Sisask	29 augusti 2024

Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 skrivningspoäng ger betyg åtminstone E.

Påminnelse.

- Om inget annat anges så används standard inre produkterna på vektorrummen $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$.
- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ står för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i kroppen $\mathbb{F}$.
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ står för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i kroppen $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) Låt $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara vektorer i ett vektorrum V över en kropp $\mathbb{F}$. Ange definitionen av att $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ är en (ordnad) *bas* för V. (Du behöver inte ange definitionen av ”ordnad”.) (1p)

   (b) Visa, utifrån definitionen, att $B = \big((1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\big)$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. (2p)

   (c) En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uppfyller att (2p)

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,2) \\ T(1,1,0) &= (-1,1) \\ T(1,1,1) &= (0,1). \end{aligned}$$

   Beräkna $T(4,2,3)$. Finns det någon vektor $v \in \mathbb{R}^3$ förutom $(4,2,3)$ sådan att $T(v) = T(4,2,3)$?

2. (a) Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett $\mathbb{F}$-vektorrum V. Ange definitionerna av begreppen *egenvektor* och *egenvärde* för T. (1p)

   (b) I resten av frågan tar vi $\mathbb{R}$ som kropp. Låt (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

   Finn fyra linjärt oberoende egenvektorer för A, och bestäm samtliga A:s egenvärden.

   (c) Är matrisen A från föregående del diagonaliserbar? Kom ihåg att samtliga svar ska motiveras. (1p)

Var god vänd!

3. Betrakta polynomrummet $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ med inre produkten

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx \qquad (\text{för } p, q \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})).$$

Låt V vara delrummet till $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ som spänns upp av $p_1 = 5x^2 - 3$ och $p_2 = 5x^2 + 16x - 6$.

(a) Bestäm en ortogonal bas för V (dvs. en bas som består av parvis ortogonala vektorer). (3p)

(b) Bestäm dimensionen av det ortogonala komplementet $V^\perp$ och finn en bas för detta delrum. (2p)

4. (a) Ange definitionen av att en matris $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ är *normal*. (1p)

(b) För ett komplext tal $c \in \mathbb{C}$, låt (4p)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}}(1+i) & 3+4i \\ c & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

Finn alla värden på c sådana att det finns en ON-bas för $\mathbb{C}^2$ bestående av egenvektorer för A. (Det är inte nödvändigt att specificera ON-basen.)

5. (a) Låt $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Vad är definitionen av *en singulärvärdesuppdelning* av A? (2p)

(b) Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

6. Låt V vara ett 2-dimensionellt vektorrum över $\mathbb{R}$, och låt $T : V \to V$ vara en linjär operator som inte är noll-avbildningen (dvs. T avbildar inte alla vektorer på 0-vektorn).

(a) Ange definitionerna av nollrummet $N(T)$ och bildrummet $R(T)$. (1p)

Antag för resten av frågan att nollrummet $N(T)$ innehåller bildrummet $R(T)$, dvs. att $R(T) \subseteq N(T)$.

(b) Visa att den sammansatta avbildningen $T \circ T$ uppfyller $(T \circ T)(v) = 0$ för alla $v \in V$. (1p)

(c) Låt $u \in V$ vara en vektor som inte ligger i $N(T)$. Visa att $\{u, T(u)\}$ är en bas för V. (2p)

(d) För vilka $n \geq 1$ finns det en linjär avbildning $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sådan att $R(S) = N(S)$? (1p)

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en kopia av tentan beställas från studentexpeditionen:

`https://www.math.su.se/tentaåterlämning`