Lösningar till tentamen

Algebra, Matematik1,
191204.

a) Vi börjar med att lösa ekvationen $13x+23y=1$ med Euklides algoritm:

$$\begin{array}{rcl} 23 & = & 1\cdot 13+10 \\ 13 & = & 1\cdot 10+3 \\ 10 & = & 3\cdot 3+1, \end{array}$$

vilket ger $1=10-3\cdot 3=10-3(13-10)=4\cdot 10-3\cdot 13=4\cdot(23-13)-3\cdot 13=4\cdot 23-7\cdot 13$. En lösning till $13x+23y=1$ ges därför av $x_0=-7, y_0=4$. Den allmänna lösningen blir därmed

$$\left\{\begin{array}{rcrr} x & = & 1465x_0+ & 23n, \\ y & = & 1465y_0- & 13n, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrr} x & = & -10255+ & 23n, \\ y & = & 5860- & 13n. \end{array}\right.$$

Villkoret $x>0$ ger $n>10255/23=445,\ldots$ och p s s ger $y>0$ att $n<5860/13=450,\ldots$, dvs vi får möjliga värden för n då $446\leq n\leq 450$. Dessa fem värden ger, insatta i den allmänna lösningen, följande möjliga lösningar:

$$(95,10),(72,23),(49,36),(26,49),(3,62).$$

b) Om (x,y) är en möjlig heltalslösning till $13x^2+23y^2=1465$ så måste tydligen (x^2,y^2) vara en lösning till ekvationen i a). Men den enda av de fem lösningarna där som består av två kvadrater på heltal är $(49,36)=(7^2,6^2)$. $(7,6)$ är alltså den entydiga lösningen i detta fall.

2. Att undersöka skärningsmängden till planen är ekvivalent med att lösa ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +az & = & 1, \\ ax & -3y & +4z & = & -2, \\ 2x & -y & +4z & = & a. \end{array}\right.$$

Vi beräknar först determinanten

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ a & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right| = -a^2+2a,$$

med de två nollställena 0 och 2. Dessa är de enda möjliga värdena på a.

Fallet $a=2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De understa två ekvationerna är uppenbarligen motstridiga, vilket ger att det saknas skärningspunkter i detta fall.
Fallet $a=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

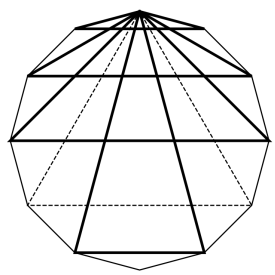
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \end{array}\right).$$

De understa två ekvationerna är identiska, varför den undre kan strykas. Om vi sätter $z=t$ så följer att $y=\frac{4}{3}t+\frac{2}{3}$ och $x=-\frac{4}{3}t+\frac{1}{3}$. Skärningsmängden är alltså linjen $(x,y,z)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)+t(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},1)$.

3.a) Varje sådan triangel bestäms entydigt genom att välja ut en delmängd med tre element ur mängden av de tolv hörnen. Detta kan göras på

$$\binom{12}{3}=\frac{12!}{3!\cdot 9!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{2\cdot 3}=220 \quad \text{sätt.}$$

b) Varje sådan liksidig triangel bestäms entydigt av ett val av ett av de tolv hörnen. Men bland dessa val kommer tre att ge samma triangel så det finns sammanlagt $12/3=4$ sådana trianglar.
c)



Det finns fem olika typer av likbenta trianglar som kan konstrueras på detta sätt, varav en typ är den liksidiga (se figur).

Var och en av de icke-liksidiga typerna förekommer i tolv olika varianter (som fås genom att rotera motsvarande typ-triangel ett tolftedels varv i taget). Den liksidiga typen finns bara i fyra varianter (enligt b). Sammanlagt får vi alltså

$$4 \cdot 12 + 4 = 52 \quad \text{sätt.}$$

4. Polynomet $p(x) = z^4 - 9z^2 + 12z + 10$ har nollstället $z = 2 + i$ och därmed är även $\overline{z} = 2 - i$ ett nollställe. Det följer att $p(z)$ är delbart med $(z-2-i)(z-2+i) = z^2 - 4z + 5$. Polynomdivision ger att

$$p(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z + 2).$$

De sista två nollställena erhålles genom att lösa andragradsekvationen $z^2 + 4z + 2 = 0$, vilket ger $z = -2 \pm \sqrt{2}$.

5. Speglingen S_1 i planet $x + y = 0$ uppfyller $S_1(e_x) = -e_y.S_1(e_y) = -e_x, S_1(e_z) = e_z$ vilket ger matrisen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Speglingen S_2 i planet $y + z = 0$ uppfyller $S_2(e_x) = e_x, S_2(e_y) = -e_z, S_2(e_z) = -e_y$ vilket ger matrisen

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Speglingen S_3 i planet $z = x$ uppfyller $S_3(e_x) = -e_z.S_3(e_y) = e_y, S_3(e_z) = -e_x$ vilket ger matrisen

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Den sammantagna effekten av de tre speglingarna (i den givna ordningen) ges av matrisen

$$A = A_3 A_2 A_1 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denna matris avbildar punkten (x, y, z) enligt

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -z \\ y \end{pmatrix},$$

dvs (x, y, z) avbildas på $(-x, -z, y)$. Vi ser vidare att

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

som avbildar (x, y, z) avbildas på $(x, -y, -z)$. Detta svarar mot en spegling i x-axeln.

6.a) Produktlagen för determinanter ger:

$$\det(A^n) = (\det(A))^n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}^n = 2^n.$$

b)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}, \ldots$$

Vi gissar att $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

c) Vi formulerar induktionshypotesen

$$P_n : A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

och ska visa att P_n är en sann utsaga för varje heltal $n \geq 1$.

Bassteget: Detta är trivialt uppfyllt eftersom vi just har valt formeln så att den ska gälla för $n = 1, 2, 3, 4$.

Induktionssteget: Antag nu att P_n är ett sant påstående. Då gäller att $(VL)_{n+1} =$

$A^{n+1} = AA^n =$ [enl induktionsantagandet]

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & (2^n - 1) + 2^n \\ 0 & 2 \cdot 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$(HL)_{n+1}$, dvs vi har visat att P_{n+1} är sant. Enligt induktionsprincipen följer nu att P_n är sant för alla $n \geq 1$.

/Martin Tamm/191204