MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik I Analys
Problemlösning, 7.5 hp
19 december 2019

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 5 poäng och 15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.

1. Beräkna gränsvärdena

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)-2x^2}{3x^4}$$

$$b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x)\sin x}{x^3+1}$$

och

$$c)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin x}{x^2-\frac{\pi^2}{4}}.$$

Lösningsförslag:

a) Vi använder standardutvecklingen

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\mathcal{O}(t^3)$$

för att få

$$\ln(1+2x^2)=2x^2-2x^4+\mathcal{O}(x^6).$$

Insatt i gränsvärdet ger oss detta

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)-2x^2}{3x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^4+\mathcal{O}(x^6)}{3x^4}=-\frac{2}{3}.$$

b) Funktionen $f(x)=\sin x$ uppfyller som bekant $|f(x)|\leq 1$ för alla $x\in\mathbb{R}$. Vi har alltså

$$\frac{|(x^2+x)\sin x|}{x^3+1|}\leq\frac{x^2+x}{x^3+1}=\frac{1+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x^2}}$$

för $x>0$. Uttrycket till höger går mot noll när $x\to\infty$, vilket i sin tur medför att

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x)\sin x}{x^3+1}=0$$

eftersom ett uttryck har gränsvärde lika med 0 precis när dess absolutbelopp har gränsvärde 0.
c) Vi observerar att $x^2-\pi^2/4=(x-\pi/2)(x+\pi/2)$ och vi får därför efter förkortning

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin x}{x^2-\frac{\pi^2}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x+\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2+\pi/2}=\frac{1}{\pi}.$$

2. Undersök extremvärden, konvexitetsegenskaper och asymptoter till funktionen

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2-1}.$$

Skissera även grafen för f.

Lösningsförslag:

Vi observerar först att $f(x)$ är en symmetrisk funktion.

Eftersom $x^2-1=(x+1)(x-1)$ kan vi skriva

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{(x+1)(x-1)}.$$

Nämnaren i detta uttryck för f har nollställen i $x=\pm 1$ och då täljaren saknar reella nollställen drar vi direkt slutsatsen att f har lodräta asymptoter i $x=\pm 1$. Vi har $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ medan $\lim_{x\to 1^-1} f(x)=-\infty$, och motsvarande gäller för gränsvärden i $x=-1$.

Vi har vidare $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2+1/x^2}{1-1/x^2}=2$. Av symmetriskäl fås att $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$. Alltså har funktionen f en horisontell asymptot $y=2$.

Vi undersöker extremvärden till f. Derivering ger

$$f'(x)=-\frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

och vi har $f'(x)=0$ endast då $x=0$. Då $f'(x)>0$ för $x<0$ och $f'(x)<0$ för $x>0$ har vi ett lokalt maximum i $x=0$. Funktionsvärdet här är $f(0)=-1$. Globalt maximum och minimum saknas.

Slutligen undersöker vi konvexitet. Vi beräknar funktionen f:s andraderivata till

$$f''(x)=6\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}.$$

Eftersom f'' har en täljare som är positiv för alla x saknar andraderivatan nollställen. Vi ser vidare att f'' är positiv för $x<-1$ och $x>1$ och negativ på intervallet $(-1,1)$. Därmed är funktionen f konvex för $x<-1$ och $x>1$ och konkav då $-1<x<1$.

3. Bestäm Taylorpolynomet av ordning fyra i punkten $x=-\pi/2$ till funktionen

$$f(x)=x\sin x.$$

Vi noterar först att $f(-\pi/2)=\pi/2$. Därefter beräknar vi successiva derivator och evaluerar dem i $x=-\pi/2$:

$$f'(x)=\sin x+x\cos x \quad \textit{vilket ger} \quad f'(-\pi/2)=-1,$$
$$f''(x)=2\cos x-x\sin x \quad \textit{vilket ger} \quad f''(-\pi/2)=-\pi/2,$$
$$f'''(x)=-3\sin x-x\cos x \quad \textit{vilket ger} \quad f'''(-\pi/2)=3,$$

samt

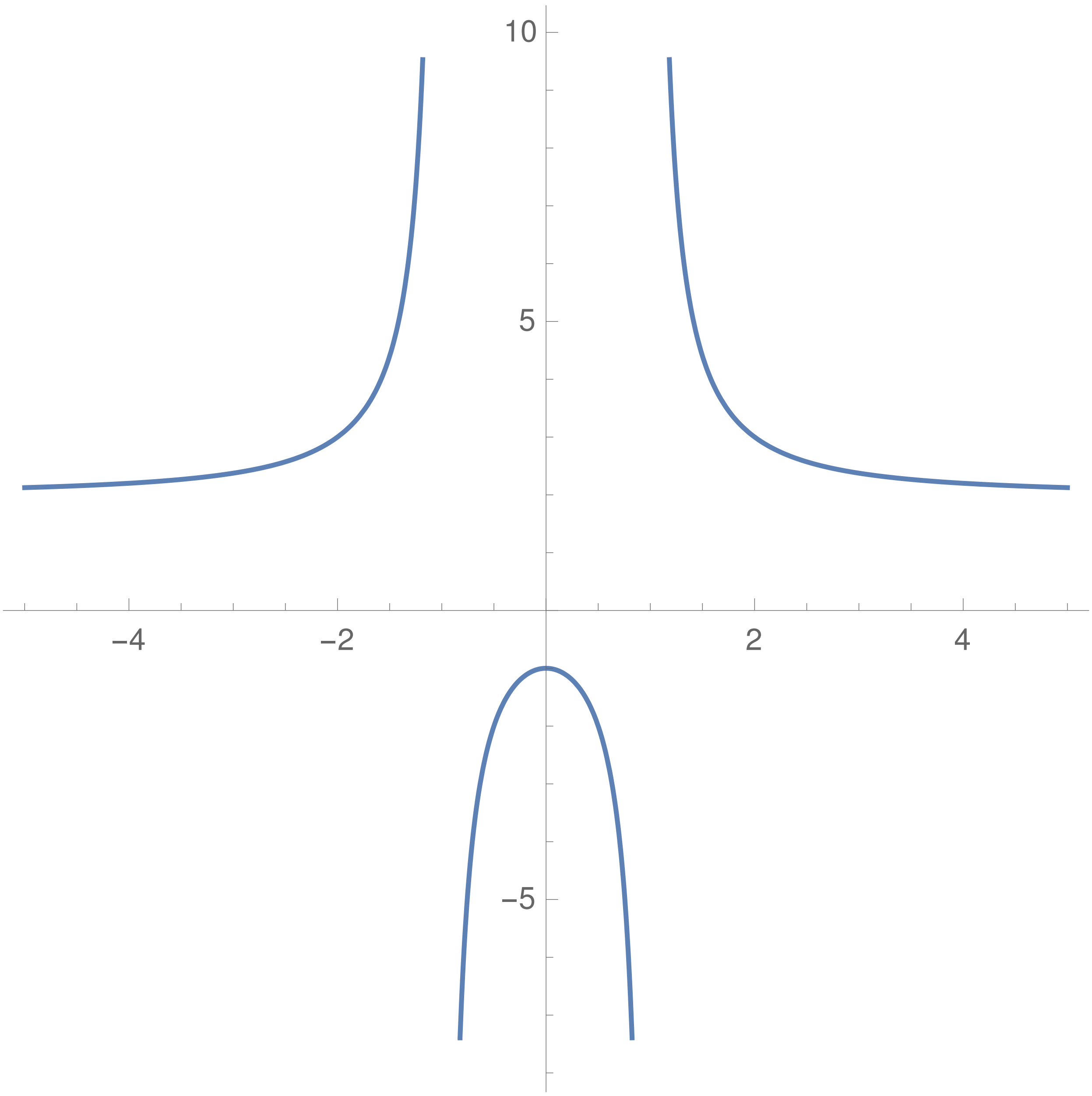
$$f^{(4)}(x)=-4\cos x+x\sin x \quad \textit{vilket ger} \quad f^{(4)}(-\pi/2)=\pi/2.$$

Insättning i Taylors formel

$$p_4(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4$$

med valet $a=-\pi/2$ ger nu det sökta Taylorpolynomet

$$\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{\pi}{48}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^4=-x-\frac{\pi}{4}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{\pi}{48}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^4.$$



Figur 1: *Grafen för f.*

4. Bestäm största och minsta värdet till funktionen

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^3$$

på kvadraten

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$$

och ange i vilka punkter dessa värden antas.

Lösningsförslag:

Vi observerar först att den givna funktionen f ges av ett polynomiellt uttryck i två variabler, och således är godtyckligt många gånger deriverbar. Detta innebär att funktionen kommer att anta en största och *ett minsta värde i det givna området, nämligen i punkter där gradienten är noll eller i punkter på randen.*

Vi beräknar först

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2 \quad \textit{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2.$$

Vi ser nu att $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ *om och endast om* $y = 0$ *medan* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ *precis när* $x = -1$. *Punkten* $(-1,0)$ *är en inre punkt, och vi har* $f(-1,0) = -1$.

Vi undersöker nu randen, vilken vi delar upp i fyra delar. Vi parametriserar dessa: först betraktar vi punkterna på formen $(t,2)$, $-2 \leq t \leq 2$. *Detta ger oss*

$$g_1(t) = f(t,2) = t^2 + 2t + 8.$$

Vi har $g_1'(t) = 2t + 2$ *och därmed* $g'(-1) = 0$. *Vi får* $f(-1,2) = 7$.

I nästa steg betraktar vi punkter på formen $(2,t)$ *och vi erhåller funktionen*

$$g_2(t) = 8 + t^3.$$

Vi har $g_2'(t) = 3t^2$ *och denna derivata är noll i* $t = 0$. *Vi beräknar* $f(2,0) = 8$.

Sedan tar vi oss an den sida av kvadratens rand som beskrivs av $(t,-2)$. *Vi betraktar nu funktionen*

$$g_3(t) = t^2 + 2t - 8.$$

Vi har $g_3'(t) = 2t + 2$ *och får ett nollställe i* $t = -1$. *Vi evaluerar* f *i motsvarande randpunkt och får* $f(-1,-2) = -9$.

Till slut betraktar vi den fjärde sidan, som vi kan parametrisera som $(-2,t)$, $-2 \leq t \leq 2$. *Vi har*

$$g_4(t) = f(-2,t) = t^3.$$

Denna funktion har uppenbarligen en sadelpunkt i origo.

Slutligen har vi fyra hörnpunkter att undersöka. Vi har $f(2,2) = 16$, $f(2,-2) = 0$, $f(-2,-2) = -8$ *samt* $f(-2,2) = 8$.

Genom att jämföra dessa värden inser vi att f *antar ett största värde* 16 *i* $(2,2)$ *och ett minsta värde* -9 *i* $(-1,-2)$.

5. a) Avgör huruvida följande generaliserade integral är konvergent:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}.$$

b) Avgör huruvida följande serie konvergerar:

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{k^2+k}{k^3+k^2-1}.$$

Lösningsförslag:

a) Eftersom kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dx}\ln\ln(x+1) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$$

så är $F(x) = \ln\ln(x+1)$ *en primitiv funktion till* $f(x) = 1/((x+1)\ln(x+1))$. *Vi har därför, för* $R > 1$, *att*

$$\int_1^R \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = [\ln\ln(x+1)]_1^R = \ln\ln(R+1) - \ln\ln 2.$$

Från detta drar vi nu slutsatsen att

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{R\to\infty}(\ln\ln(R+1) - \ln\ln 2) = +\infty.$$

Således är den givna generaliserade integralen divergent.

b) Eftersom $k^3+k^2-1 \le k^3+k^2$ har vi $1/(k^3+k^2-1) \ge 1/(k^3+k^2)$. Detta i sin tur medför att

$$\frac{k^2+k}{k^3+k^2-1} \ge \frac{k^2+k}{k^3+k^2} = \frac{k^2+k}{k(k^2+k)} = \frac{1}{k}.$$

Eftersom den harmoniska serien $\sum_{k=1}^\infty k^{-1}$ divergerar, divergerar även $\sum_{k=1}^\infty (k^2+k)/(k^3+k^2-1)$ på grund av jämförelsekriterium för serier.

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' - y' - 2y = x^2 - 1$$

som uppfyller $y(0) = 0$ och $y'(0) = -3$.

Lösningsförslag:

Vi har att göra med en inhomogen andra ordningens linjär ordinär differentialekvation med konstanta koefficienter.

Vi bestämmer först en allmän lösning till den homogena differentialekvationen $y'' - y' - 2y = 0$. Ansättning av $y = e^{rx}$ ger oss den karaktäristiska ekvationen

$$r^2 - r - 2 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger vid handen att denna ekvation har de reella rötterna $r = -1$ och $r = 2$. Ur detta drar vi slutsatsen att den allmänna lösningen till vår homogena differentialekvation ges av

$$y_h(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$$

där C_1, C_2 är reella konstanter.

Vi söker nu en partikulärlösning till $y'' - y' - 2y = x^2 - 1$. Vi ansätter $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Derivering ger

$$y_p' = 2Ax + B \quad \textit{och} \quad y_p'' = 2A.$$

Insättning i differentialekvationen ger villkoret

$$-2Ax^2 - 2(A+b)x - B - 2C = x^2 - 1$$

vilket satisfieras av $A = -1/2$, $B = 1/2$ och $C = -1/4$.

Den allmänna lösningen till den givna inhomogena differentialekvationen ges alltså av

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger oss att $C_1 + C_2 - \frac{1}{4} = 0$ medan $y'(0) = -3$ medför att $-C_1 + 2C_2 + \frac{1}{2} = -3$. Löser vi detta linjära ekvationssystem får vi $C_2 = -13/12$ samt $C_1 = 4/3$.

Den sökta lösningen på begynnelsevärdesproblemet är således

$$y(x) = \frac{4}{3}e^{-x} - \frac{13}{12}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Skrivningsåterlämning äger rum fredag 3 januari 2020 klockan 15:00 utanför sal 15 i hus 5.
Därefter kan skrivningen hämtas på studentexpeditionen i rum 204.