Algebra och Kombinatorik
HT 2018
Omtentamen
6 mars 2019
9:00-14:00
Examinator: Dan Petersen

Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
Varje korrekt löst uppgift ger fyra poäng. Lycka till!

1. Låt H vara en $n \times m$ checkmatris, och låt C vara koden $\{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}/2)^m : H\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Låt $\mathbf{v}$ vara en godtycklig vektor i $(\mathbb{Z}/2)^m$, och låt C' vara koden $\{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}/2)^m : H\mathbf{x} = H\mathbf{v}\}$. Visa att C och C' har samma antal element och samma minimumavstånd.

   Lösning. Antag att $\mathbf{x} \in C$, d.v.s. $H\mathbf{x} = \mathbf{0}$. I så fall är $\mathbf{x} + \mathbf{v} \in C'$, eftersom

   $$H(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = H\mathbf{x} + H\mathbf{v} = \mathbf{0} + H\mathbf{v} = H\mathbf{v}.$$

   Omvänt ser vi att om $\mathbf{y} \in C'$ så är $\mathbf{y} - \mathbf{v} \in C$. Funktionen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}$ är alltså en bijektion från C till C', så C och C' har samma antal element. Bijektionen bevarar också avstånd mellan två element, så koderna har samma minimumavstånd.

2. Hur många sexsiffriga tal (dvs. tal x med $100\ 000 \leq x \leq 999\ 999$) finns det där varje siffra förekommer exakt två gånger? Till exempel är 188 717 och 267 726 sådana tal.

   Lösning. Vi kan tänka att vi har sex "lådor" som siffror ska placeras in i. Vi börjar med att dela in de sex lådorna i tre stycken oordnade par. Detta kan göras på

   $$\frac{1}{3!}\binom{6}{2,2,2} = 15 \text{ sätt.}$$

   Sedan väljer vi tre olika siffror att placera ut i de tre paren av lådor. Den första siffran i talet får inte vara 0, så där har vi 9 olika siffror att välja mellan. Nästa siffra får inte vara samma som den första vi valde, så där har vi också 9 val. Den sista siffran får inte vara samma som någon av de två tidigare, så där har vi 8 val. Totalt finns alltså

   $$15 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 9720 \text{ sådana sexsiffriga tal.}$$

3. Visa att den symmetriska gruppen S_n har element av ordning m för alla $1 \leq m \leq n$. Visa också att S_n inte har ett element av ordning $n+1$, om $n+1$ är ett primtal.

   Lösning. Låt $1 \leq m \leq n$. En permutation som består av en cykel av längd m, och som fixerar resterande element, kommer ha ordning m. Så t.ex. kommer permutationen $(123\ldots m)$ vara ett exempel på ett element i S_n av ordning m.

   Antag att $n+1$ är ett primtal. Om $\pi \in S_n$ har ordning $n+1$ så måste $n+1$ dela $n!$ enligt Lagranges sats. Men alla primtalsfaktorer till $n!$ är mindre än eller lika med n, så detta är omöjligt. Alternativt kan vi använda att ordningen av en permutation är minsta gemensamma multipeln av längderna på cyklerna som ingår i permutationen. Men $n+1$ är ett primtal, så det är inte en multipel av något mindre tal.

4. Ola drar fem kort från en kortlek. Hur stor är sannolikheten att han får minst två kort med samma valör? (En kortlek består av 52 kort i 13 olika valörer; det finns 4 stycken kort av varje valör.)

   Lösning. Vi räknar först ut sannolikheten att han drar fem kort utan att få två av samma valör. I så fall kan första kortet dras godtyckligt. Andra kortet ska väljas bland 51 möjliga, varav $52 - 4 = 48$ inte har samma valör som det han redan dragit. Tredge kortet ska väljas bland 50 möjliga, varav $52-4-4 = 44$ kort inte har samma valör som de två han dragit, och så vidare. Vi ser att sannolikheten att han drar fem kort utan att få två av samma valör blir $1 \cdot \frac{48}{51} \cdot \frac{44}{50} \cdot \frac{40}{49} \cdot \frac{36}{48}$. Svaret blir alltså att sannolikheten är

$$1 - \frac{48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \approx 49.3\%.$$

5. Definiera en relation $\sim$ på mängden $\mathbb{Z}$ av heltal enligt $x \sim y \iff x^3 \equiv y^3 \pmod{12}$. Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation, och ange exakt ett element ur varje ekvivalensklass.

   Lösning. Alla tre egenskaperna för en ekvivalensrelation — reflexivitet, symmetri, och transitivitet — är uppenbart sanna. Vi ska nu hitta ett element ur varje ekvivalensklass. Vi beräknar helt enkelt x^3 för alla element x i $\mathbb{Z}/12$. Vi finner följande:

x	x^3
0	0
1	1
2	8
3	3
4	4
5	5
6	0
7	7
8	8
9	9
10	4
11	11

   Vi ser alltså att en representant ur varje ekvivalensklass t.ex. kan ges av $0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11$.

6. Lös följande system med två ekvationer och två obekanta i $\mathbb{Z}/16$, eller visa att det saknar lösningar.

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - 2y &= 2. \end{aligned}$$

   Lösning. Subtrahera den andra ekvationen från den första för att få $3y = 1$. Detta säger oss att elementet y är inverterbart, och att y ges av den unika inversen till 3. Inversen kan t.ex. hittas med Euklides algoritm, som går väldigt snabbt i detta fall: vi finner att $16 = 3 \cdot 5 + 1$, så $3 \cdot 5 = -1$ i $\mathbb{Z}/16$ och $3 \cdot (-5) = 1$. Vi ser alltså att $y = -5 = 11$. Insättning i den första ekvationen ger sedan att $x = 3 - 11 = 8$.