MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Dan Petersen
Kontrollant:Sofia Tirabassi

Tentamensskrivning i
Algebra och Kombinatorik, MM5013
7.5 hp
2017-05-24

(1)

(a), (b) Man måste räkna antalet av ordnade ord med 3 bokstaver och ett alfabet med n bokstaver. Vi kan repetera en bokstav mer än en gång. Så är

$$|X_n| = n^3.$$

Vi har att $|X_2| = 8$ och $|X_4| = 4^3$

The symmetric group S_3 acts on X_n by interchanging the labels of the boxes.

(c), (d) Med Burnsides Lemma har vi:

$$|X_n/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X_n^g|.$$

Gruppen G är S_6 så är $|G| = 6$. Vi måste hitta $|X_n^g|$ för alla $g \in G$. Minnas att

$$X_n^g := \{x \in X_n \mid gx = x\}.$$

(g=id) $X_n^g = X_n$, så $|X_n^g| = n^3$

($g = (12)$) För att bli inte ändrat av g, måste den första och andra lador malas med den samma fargen. Den tredje kan malas hur som helst. Alts är $|X_n^g| = n^2$

($g = (13)$) $|X_n^g| = n^2$ (samma metod som i $g = (12)$)

($g = (23)$) $|X_n^g| = n^2$ (samma metod som i $g = (12)$)

($g = (132)$) Alla lador måste malas med samman farg: $|X_n^g| = n$

($g = (123)$) Alla lador måste malas med samman farg: $|X_n^g| = n$

Vi har

$$|X_n/G| = \frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n).$$

Så är $|X_4| = \frac{1}{6}(4^3 + 3(4^2) + 8)$

(c), (d) Alternativ lösning: antalet banor r bara antalet av ornade ord med 3 bokstaver och en alfabet av n bokstaver nr man kan repetera en bokstaver mer än en gång. Vi har

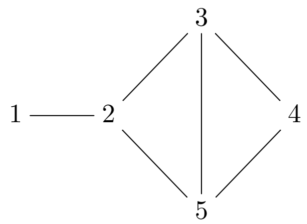
$$|X_n/G| = \binom{n+3-1}{3}$$

och

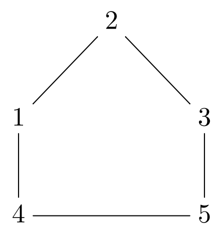
$$|X_4/G| = \binom{6}{3}.$$

(2) (a)

- (3,3,3,1,2):



- (4,4,4,3,2) : Det finns inte: summan av grader är udd.
- (4,4,4,2,2) Det finns inte: tre hörner är smahangd med alla andra hjörner. Det betyder att alle hjörner har graden minst 3.
- (2,2,2,2,2)



(b)

- (3,3,3,1,2): det finns inte ett Eulerspår: grafen är sammangangd men den har 4 udda hjörner. Om det finss en Eulerspår måste en graf har inte mer än 2 udda jörnen.
- (2,2,2,2,2): $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$ är en Eulerspår

(3) (a) Gruppen $\mathbb{Z}/4$ är cyklisk och elemntet 1 har ornding 4. Men inga element i $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ har orning 4: låt $x = (a, b) \in \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, så har vi

$$x + x = (2a, 2b) = (0, 0) = e.$$

Därför drar vi att $\mathrm{ord}(x) \leq 2$ för alla $x \in \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$

(b) Gruppen $\mathbb{Z}/n^2$ är cyklisk och elemntet 1 har ornding n^2. Men alla element i $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n$ har orning $\leq n < n^2$: låt $x = (a, b) \in \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n$, så har vi

$$nx = (na, nb) = (0, 0) = e.$$

Därför drar vi att $\mathrm{ord}(x) \leq n$ för alla $x \in \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n$

(4) (a)

n	n^2	$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$
0	0	0
1	1	1
2	4	5
3	2	0
4	2	2
5	4	6
6	1	0

(b) Låt n ett positivt heltal. Vi kan skriva $n = 7q + r$ med $0 \leq r \leq 6$. Vi ska visa att

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \equiv 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + r^2 \pmod 7$$

Vi använder att for alla $m, s \in \mathbb{Z}$, $m \equiv s \pmod 7$ innebär att $m^2 \equiv s^2 \pmod 7$

$$0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2 \equiv \underbrace{(0^2+\cdots 6^2)+\cdots+(0^2+\cdots 6^2)}_{q \text{ gånger}}+$$
$$+0^2+1^2+2^2+\ldots+r^2 \pmod 7$$
$$\equiv q\cdot 0+0^2+1^2+2^2+\ldots+r^2 \pmod 7$$
$$\equiv 0^2+1^2+2^2+\ldots+r^2 \pmod 7$$

(5)

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a)

$$\operatorname{Ker} H=\{(0,0,0,0,0,0),(1,0,1,0,1,0),(0,1,1,0,0,1),(0,1,1,1,1,0),$$
$$(1,1,0,1,0,0),(1,0,1,1,0,1),(0,0,0,1,1,1),(1,1,0,0,1,1)\}$$

(b) Längd= antalet kolonner = 6
Dimension=antalet fria variabeler = 6-antalet pivot= 3
Minst avstandning= minst antalet av 1 i element av koden= 3.

(c) Vi kontrollera att ingen kolonn av H är noll och det finns inte två lika kolonner. Vi räkna:

$$H\cdot \mathbf{z}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektoren $(1,1,0)^t$ är den andra kolonnen av H. Det betyr att fel ŕ i andre bit av $\mathbf{z}$ och att det riktiga kodeordet är $(1,0,1,0,1,0)$.

(c) Alternativ lösning: Vi använder den närmeste grannen metoden och vi hitta att

$$\partial(\mathbf{z},(1,0,1,0,1,0))=1$$

och

$$\partial(\mathbf{z},\mathbf{c})>1$$

för alla $\mathbf{c}\in \operatorname{Ker} H$, $\mathbf{c}\neq(1,0,1,0,1,0)$. Så det riktiga kodeordet är $(1,0,1,0,1,0)$.

(6) (a)

x	$x^4+4x^3+x^2+4$
0	4
1	0
2	1
3	3
4	2

Vi har bara en röt $x=1$

(b) Vi delar $x^4+4x^3+x^2+4$ med $(x-1)=(x+4)$. Vi finn

$$x^4+4x^3+x^2+4=(x+4)(x^3+x+1)$$

Nu måste vi kontrollera om x^3+x+1 har rötter i $\mathbb{Z}/5$. Det är nok at kontrollera om 1 är en rot, eftersom alle rötter av x^3+x+1 är också rötter av $x^4+4x^3+x^2+4$. Vi har att $1^3+1+1=3\neq 0$ i $\mathbb{Z}/5$. Eftersom graden til x^3+x+1 är 3, $\mathbb{Z}/5$ är en kropp, och x^3+x+1 har ingen rot i $\mathbb{Z}/5$ vi har att x^3+x+1 är irrdeucibel och $x^4+4x^3+x^2+4$ faktorisera som $(x+4)(x^3+x+1)$.