STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematik,
Examinator: H. Granath

Tentamen i
Algebra och kombinatorik
3 februari 2021, kl $09^{00} - 14^{00}$

Hjälpmedel: kursbok och anteckningar. Alla svar skall motiveras!

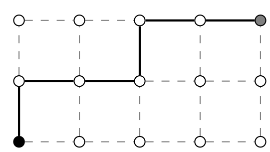
Uppgift 1. Följande matris bestämmer en linjär kod

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Skriv ned alla kodord som bestäms av matrisen (man kan få delpoäng för exempel på kodord).

Uppgift 2. Hur många moniska polynom i $\mathbb{Z}_7[x]$ av grad 2 finns det? Hur många moniska polynom i $\mathbb{Z}_7[x]$ av grad 2 finns det som är reducibla?

Uppgift 3. Låt $H_{3,n}$ vara den $3 \times n$ stora rutnätsgrafen. Till exempel, $H_{3,5}$ är ritad nedan:



Antag att du börjar i nedre vänstra hörnet, och skapar en stig genom att antingen gå uppåt eller åt höger i varje steg, tills du når det övre högra hörnet. En sådan stig har ritats i figuren.

a) (2p) Visa att totala antalet "upp-höger" stigar som räknas av $H_{3,n}$ ges av $\binom{n+1}{2}$.

b) (3p) Låt a_n vara antalet ord av längd $n-1$ som består av siffrorna $0, 1, 2$, där siffrorna sorterats i ökande ordning i ordet. Till exempel, `00112` bidrar till a_6. Visa att $a_n = \binom{n+1}{2}$.

Uppgift 4. a) Ge exempel på två permutationer σ, π i S_6 som kommuterar, och så att minsta permutationsgruppen som innehåller både σ och π har 8 element.

b) Finns det en surjektiv homomorfi ϕ från S_7 till S_2?

Var god vänd!

Uppgift 5. Låt $K_{m,n}$ med $m, n \geq 1$ beteckna den kompletta bipartita grafen med m hörn i den ena delen, och n hörn i den andra, dvs. $K_{m,n} = (V, E)$ där

$$V = \{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n\} \quad E = \{(v_i, w_j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Avgör för vilka par (m, n) som $K_{m,n}$ har

(a) en Eulerkrets

(b) en Eulerstig.

Uppgift 6. Låt G vara en ändlig grupp som verkar på en mängd X. Antag att $g \in G$ och att $k \in \mathbb{N}$.

(1p) Visa att $\mathrm{Fix}(g) \subseteq \mathrm{Fix}(g^k)$.

(4p) Visa att $\mathrm{Fix}(g) = \mathrm{Fix}(g^k)$ om g och g^k har samma ordning.