MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys A, 7.5 hp
den 6/3 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *Betrakta funktionen*

$$g(x,y) = \begin{cases} xy\,\exp(\frac{xy}{x^4+y^4}) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

där som vanligt $\exp(t) = e^t$.

(a) *Är funktionen g kontinuerlig i origo?* *2 p*

(b) *Är funktionen g partiellt deriverbar i origo? Bestäm derivatorna i så fall.* *2 p*

(c) *Är funktionen g differentierbar i origo?* *1 p*

Motivera dina svar!

(a) Vi betraktar $g(x,x) = x^2\exp(\frac{1}{2x^2})$ och ser att $g(x,x)$ är obegränsad då $x \to 0$, ty $\lim_{x\to 0} x^2\exp(\frac{1}{2x^2}) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} e^{\frac{1}{2}t} = \infty$ (som oegentligt gränsvärde). Dvs g kan inte vara kontinuerlig i origo.

(b) Antingen ser vi direkt att $g(x,0) = 0$ för alla x. Därmed är g även i origo partiellt deriverbar med avseende på x och derivatan är lika med 0. Samma argument fungerar även för den partiella derivatan med avseende på y.

Eller så kan man använder sig av definitionen direkt, dvs beräkna i detta fall

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0,h) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 \cdot h \exp(\frac{0\cdot h}{0^2+h^2}) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 = g'_y(0,0).$$

(c) Nej, enligt (a) är g ej kontinuerlig, och därmed kan den inte vara differentierbar.

Svar: (a) Nej, ej kontinuerlig (b) Ja, $g'_x(0,0) = g'_y(0,0) = 0$ (c) Nej, ej differentierbar.

2. (a) *Bestäm alla stationära punkter till funktionen* *5 p*

$$H(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{6}(x-y+z)^4$$

och avgör deras karaktär. Antar H ett största och/eller minsta värde i $\mathbb{R}^3$? Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} Hx' &= 2x - \frac{2}{3}(x-y+z)^3 = 0 \\ H'_y &= 2y + \frac{2}{3}(x-y+z)^3 = 0 \\ H'_z &= 2z - \frac{2}{3}(x-y+z)^3 = 0 \end{aligned}$$

Subtraktion av den första och den andra ekvationen, samt den andre och den tredje leder till

$$x + y = 0 \qquad \text{och} \qquad y + z = 0$$

, dvs $x = -y$ och $z = -y$. Insättning i t.ex. den andra ekvationen ger då

$$y(1 - (3y)^2) = 0,$$

vilket ger oss tre lösningar för y, nämligen $y = 0$ och $y = \pm\frac{1}{3}$. Därmed har vi tre stationära punkter, nämligen $(0,0,0)$ och $(\mp\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \mp\frac{1}{3})$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$H''_{xx} = H''_{yy} = H''_{zz} = 2-2(x-y+z)^2 \qquad H''_{xy} = H''_{yz} = 2(x-y+z)^2 \qquad H''_{xz} = -2(x-y+z)^2.$$

För punkten $(0,0,0)$ är den kvadratiska formen

$$Q_0(h,k,\ell) = 2h^2 + 2k^2 + 2\ell^2$$

positivt definit och punkten är därmed en lokal minimipunkt. I punkterna $(\mp\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \mp\frac{1}{3})$ gäller $(x-y+z)^2 = 1$ och därmed har båda punkterna samma kvadratiska fom

$$Q(h,k,\ell) = 4hk - 4h\ell + 4k\ell.$$

Den är indefinit, ty t.ex. $Q(h,k,0) = 4hk$ antar både positiva och negativa värden. Punkterna är därmed sadelpunkter.

H är både nedåt och uppåt obegränsad, ty $H(x,x,0) = x^2 \to \infty$, då $x \to \infty$ och $H(x,0,0) = x^2 - \frac{1}{6}x^4 = x^2(1-\frac{1}{6}x^2) \to -\infty$, då $x \to \infty$.

Svar: $(0,0,0)$ är en lokal minimipunkt och $(\mp\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \mp\frac{1}{3})$ är sadelpunkter.
Varken minsta eller största värde antas.

(b) *Låt G vara en $\mathcal{C}^3$-funktion som har Taylorutvecklingen* *1 p*

$$G(x,y) = (x-1) + y + (x-1)^2 + y^2 + ((x-1)^2 + y^2)^{3/2} B(x,y)$$

kring $(1,0)$. Är $(1,0)$ en lokal minimipunkt för G? Motivera ditt svar!

Från Taylorutvecklingen kan vi avläsa $G'_x(1,0) = 1$ (och även $G'_y(1,0) = 1$). Alltså är $(1,0)$ inte en stationär punkt och kan därmed (ty G differentierbar) inte vara en lokal extrempunkt.

3. *Avgör om funktionen* *6 p*

$$h(x,y) = (x+y-1)e^{2(x^2+y^2)}$$

antar största och minsta värde i $D = \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 < 2\}$ och bestäm dessa i så fall.

Vi börjar med att konstatera att funktionen h är kontinuerlig (faktiskt i hela $\mathbb{R}^2$). Området D är den delen av den öppna cirkelskivan med radie $\sqrt{2}$ och medelpunkt i origo, som ligger i den slutna första kvadranten. D är alltså begränsad, men inte sluten, dvs inte kompakt.

Vi ser dock att funktionen är noll längs linjen $y = 1-x$ och är negativ i den kompakta triangeln $D_- := D = \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1-x\}$, medan den är positiv i resterande delen av området $D \setminus D_-$. Därmed antar h ett minsta värde i D_- som även är minsta värde i D.

För att undersöka om h antar även största värde kan vi använda oss av polära koordinater och uppskatta

$$h(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (r(\cos\varphi+\sin\varphi)-1)e^{2r^2} = (r\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})-1)e^{2r^2} < (\sqrt{2}\sqrt{2}-1)e^{2r^2} < e^4,$$

där vi också vet att olikheten är strikt, ty $r < \sqrt{2}$. I uppskattningens första steg har vi sett att (för givet r blir funktionen störst längs linjen $\varphi + \frac{\pi}{4}$, dvs $x = y$. Alltså kollar vi h längs denna linje mot randen av cirkelskivan, dvs $\lim_{x\to 1} h(x,x) = \lim_{x\to 1}(2x-1)e^{4x^2} = e^4$. Då vet vi att h antar värden godtyckligt nära e^4, men å andra sidan har vi sett att $h(x,y) < e^4$ i D. Alltså finns inget största värde.

Det återstår nu att beräkna det minsta värdet. Vi börjar med att kolla stationära punkter, dvs ekvationssystemet

$$\begin{aligned} h'_x &= e^{2(x^2+y^2)}(1+4x(x+y-1)) = 0 \\ h'_y &= e^{2(x^2+y^2)}(1+4y(x+y-1)) = 0. \end{aligned}$$

Vi får $x = y$ och insättning i t.ex. den första ekvationen ger ingen lösning, dvs det finns inga stationära punkter. Sedan kollar vi randen av triangeln D_-. Längs linjestycket $(t, 0)$ för $0 \leq t \leq 1$ får man (efter lite räkning) en möjlig inre punkt, nämligen $(\frac{1}{2}, 0)$ och av symmetriskäl även $(0, \frac{1}{2})$ på linjestycket på y-axeln. Längs triangelns hypotenus är funktionen 0. Vi måsta alltså jämföra följande värden

$$h(\frac{1}{2}, 0) = h(0, \frac{1}{2}) = -\sqrt{\frac{e}{4}} \qquad h(0,0) = -1 \text{ och } 0.$$

Minsta värdet är då -1.

Svar: Minsta värde: -1, största värde saknas.

4. *Undersök om funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ antar ett största och/eller minsta värde längs den givna kurvan.*

   (a) $x^2 + xy + y^2 = 1$ *1 p*

   (b) $x^2 + 12xy + y^2 = 1.$ *1 p*

   (c) Välj EN kurva, dvs antingen (a) eller (b), och ange för denna kurva största och/eller minsta värde (i fall de finns). *3 p*

Motivera dina svar! Funktionen f är kontinuerlig. En möjlighet är att konstatera att båda kurvor faktiskt är kegelsnitt, antingen ellipser eller hyperbler. Genom kvadratkomplettering kan vi avgöra vilket fall inträffar.

(a) $x^2 + xy + y^2 = 1$ kan skrivas som $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$. Alltså är kurvan en ellips, dvs sluten och begränsad, och f antar både största och minsta värde på kurvan. (OBS i fall man inte känner igen att det handlar sig om en ellips ser man från kvadratkompletteringen i alla fall att kurvan är begränsad, ty man får begränsningar $\frac{3}{4}y^2 \leq 1$ och $(x + \frac{y}{2})^2 \leq 1$.)

(b) $x^2 + 12xy + y^2 = 1$. kan skrivas som $x^2 + 12xy + y^2 = (x + 6y)^2 - 35y^2 = 1$. Alltså är kurvan en hyperbel. Eftersom den är obegränsad kommer f anta godtyckligt stora värden (f mäter ju avståndet till origo i kvadrat) och inget största värde antas. Minsta värdet antas dock, ty vi kan välja en stor sluten cirkelskiva, då antar f minsta värdet på den slutna mängden som utgörs av kurvan som ligger innanför cirkelskivan. Detta är även minsta värdet på hela kurvan, ty funktionsvärden utanför är säkert större än cirkelskivans radie i kvadrat. (OBS: Även här kan man argumentera utan att känna igen hyperbeln, t.ex. genom att visa att för varje x finns det ett y, sådan att punkten (x, y) ligger på kurvan, dvs den är obegränsad.)

1 p

(c) För att beräkna minsta/största värdet kan vi använda oss av två metoder, för omväxlings skull ange jag här den ena för (a) och den andra för (b):

(a) Vi använder oss av Lagrangemultiplikatormetoden, där alltså $f(x, y) = x^2 + y^2$ och $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$. Vi börjar med att kolla om det finns en singular punkt på kurvan. Den enda lösningen till $\text{grad} g = (2x + y, x + 2y) = (0, 0)$ är $(0, 0)$, men $g(0, 0) \neq 0$, dvs punkten ligger inte på kurvan. Hjälpfunktionen är nu

$$H(x, y; \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$$

och vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned} H'_x &= 2x - \lambda(2x + y) = 0 \\ H'_y &= 2y - \lambda(2x + y) = 0 \end{aligned}$$

samt

$$H'_\lambda = -(x^2 + xy + y^2 - 1). = 0$$

Elimination av λ ger (efter lite räkning!) $x = \pm y$. I första fallet ger bivillkoret att $x^2 = \frac{1}{3}$ och därmed funktionsvärdet $\frac{2}{3}$, medan det andra fallet ger $x^2 = 1$ och därmed funktionsvärdet 2. Minsta värdet är alltså $\frac{2}{3}$ och största värdet 2.

(b) Ett alternativ är att använda det nödvändiga villkoret att grad$f$ och grad$g$ ska vara parallella direkt med hjälp av determinanten, dvs vi har ekvationen

$$\det\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x+y & 2x+y \end{pmatrix} = 0$$

Vi får igen $x^2 = y^2$, men nu leder enbart $x = y$ till en lösning, nämligen $x^2 = \frac{1}{14}$, medan $x = -y$ inte ger någon lösning. Minsta värdet är alltså $\frac{2}{14}$.

Svar: (a) <u>Både största och minsta värde antas</u> (b) <u>Endast minsta värde antas</u>

(c) <u>I (a) är minsta värde $\frac{2}{3}$ och största värde 2. I (b) är minsta värde $\frac{2}{14}$.</u>

5. *Lös för $x, y > 0$ den partiella differentialekvationen* *4 p*

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = x$$

t.ex. genom att använda variabelbytet $s = xy$ och $t = \frac{x}{y}$.

Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(s,t) := F(x,y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F'_y &= \widetilde{F}'_s \cdot y + \widetilde{F}'_t \cdot \frac{1}{y} \\ F'_z &= \widetilde{F}'_s \cdot x + \widetilde{F}'_t \cdot \frac{-x}{y^2} \end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då (efter lite räkning)

$$\widetilde{F}'_s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{s}}.$$

Integration leder till

$$\widetilde{F}(s,t) = \sqrt{st} + \phi(t)$$

och därmed

$$F(x,y) = x + \phi(\frac{x}{y}),$$

där ϕ är en tillräckligt många gånger deriverbar funktion.

Svar: <u>allmänna lösning $F(x,y) = x + \phi(\frac{x}{y})$</u>

6. *(a) Undersök om följande serier är konvergenta:* *2 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n^2}} - 1)$$

(b) Undersök om den generaliserade integralen *2 p*

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}\, dx$$

är konvergent.

(a) Observera $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1$.

För första serien ser vi därför att termerna $n(e^{\frac{1}{n}} - 1) \to 1$ då $n \to \infty$, dvs termerna går inte mot 0 och serien kan inte vara konvergent. För den andra och tredje serien kan vi använda jämförelsekriteriet II och jämföra med den konvergenta serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. I båda fall blir gränsvärdet 1 och serierna är konvergenta. (OBS: För en fullständig lösning ska dessa gränsvärden beräknas!)

(b) Integralen är generaliserad både i $x = 0$ och vid ∞ och vi delar därför integralen upp i två delar som undersöks var för sig:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}\,dx.$$

Maclaurinutvecklingen av $\arctan x^2$ leder oss till att använda jämförelsekriteriet II och vi beräknar

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \ldots = 1.$$

Eftersom den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent är enligt jämförelsesatsen även $\int_0^1 \frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ konvergent.

I den andra integralen är däremot $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ dominerande. Ty $\lim_{x\to\infty} \arctan x^2 = \frac{\pi}{2}$ och igen jämförelsekriteriet II ger att även den andra integralen är konvergent, ty $\int_0^1 \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent.

Svar: (a) divergetn, konvergent, konvergent (b) konvergent