

Inga hjälpmedel tillåtna. 15 poäng ger säkert godkänt på den skriftliga delen. Samtliga svar måste motiveras ordentligt!

1. Betrakta funktionen $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} : g(x, y) = \arctan \frac{x+y}{x^2+y^2}$. 5 p

- (a) Undersök om gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ finns och bestäm det i förekommande fall.
- (b) Undersök om gränsvärdet $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} g(x, y)$ finns och bestäm det i förekommande fall.
- (c) Ange en kurva, sådan att funktionen g är konstant längs kurvan (med enda eventuella undantag att funktionen inte är definierad i origo).

2. Avgör om funktionen $G(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + 5y^2 + 1}$ antar största och/eller minsta värde i mängden $D := \{(x, y) : |y| \leq 1\}$ och bestäm dessa extremvärden i förekommande fall. 5 p

3. Betrakta funktionen 5 p

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + 2z^2) + xy.$$

Bestäm alla stationära punkter till f och avgör deras karaktär.

4. Betrakta funktionen $h(x, y) = x^4 + y^4$. 5 p

- (a) Avgör om funktionen h antar på kurvan $x^2 + 6xy + y^2 = 2$ största och/eller minsta värde, och bestäm dessa i förekommande fall.
- (b) För vilka värden på $\alpha \in \mathbb{R}$ är funktionen h på kurvan $x^2 + 2\alpha xy + y^2 = 2$ begränsad?

5. Bestäm alla C^2 -funktioner F som uppfyller differentialekvationen 5 p

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{4y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{4y^3} \frac{\partial F}{\partial y} = 16y^2$$

i området $y > 0$, t.ex. genom att införa de nya variablerna $s = x + y^2$ och $t = x - y^2$.

6. (a) Avgör för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent: 3 p

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 400} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^4 + 400}.$$

(b) Avgör för var och en av följande generaliserade integraler om den är konvergent eller divergent: 2 p

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2 + 1)} dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2 - 1)} dx.$$

Resultat publiceras så snabbt som möjligt på kurshemsidan. Även information angående anmälan och schemat till muntan kommer upp där efter att den skriftliga tentan är rättad.

Visning av skriftliga tentorna: Torsdag 5/12, kl 14:35, sal 16 i hus 5.

Återlämning: bara efter att betyg har sätts, dvs säkert när alla muntliga tentor har avslutats, på studentexpeditionen, rum 204 i hus 6.

Vid frågor kontakta: Annemarie Luger (luger@math.su.se)

Lycka till!